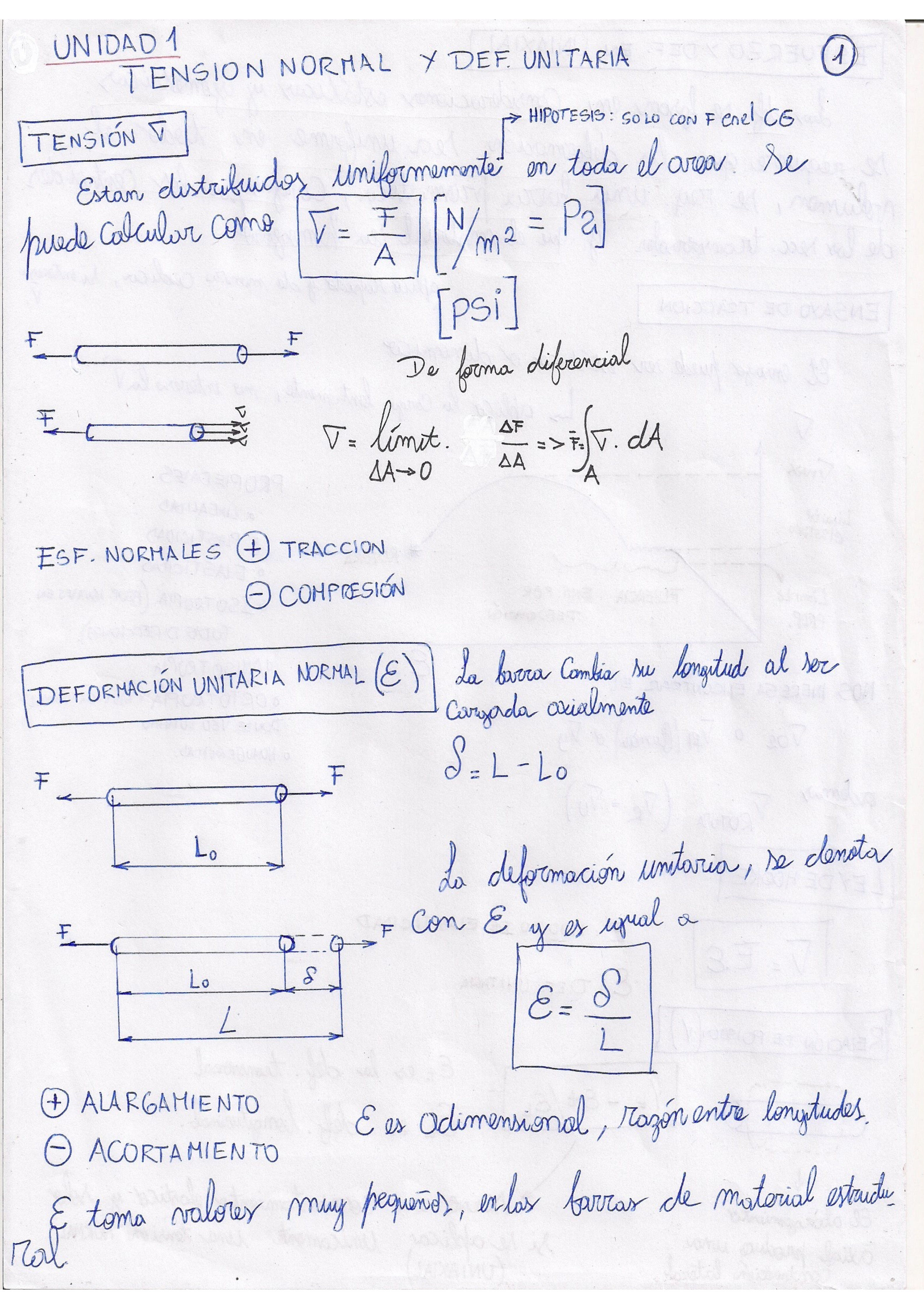


UNIDAD 1

TENSION NORMAL Y DEF. UNITARIA

TENSIÓN σ

→ HIPOTESIS: SOLO CON F en el CG

Estan distribuidos uniformemente en toda el area. Se puede calcular como

$$\boxed{\sigma = \frac{F}{A}} \quad \left[N/m^2 = Pa \right]$$

$$[PSi]$$

De forma diferencial

$$\sigma = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} \Rightarrow F = \int_A \sigma \cdot dA$$

ESF. NORMALES (+) TRACCION

(−) COMPRESIÓN

DEFORMACIÓN UNITARIA NORMAL (ε)

La barra cambia su longitud al ser cargada axialmente

$$\delta = L - L_0$$

La deformación unitaria, se denota con ε y es igual a

$$\boxed{\varepsilon = \frac{\delta}{L}}$$

(+) ALARGAMIENTO

(−) ACORTAMIENTO

ε es adimensional, razón entre longitudes.

ε toma valores muy pequeños, en las barras de material estructural.

ESFUERZO Y DEF. EN UNIAXIAL

Las def. se basan en consideraciones estáticas y geométricas. Se requiere que la deformación sea uniforme en todo el volumen, se req. una barra prismatica, Cargas por los centroides de las secc. transversales y que el material sea homogeneo.

ENSAYO DE TRACCION

El ensayo puede ser estático o dinamico

↳ aplico la carga lentamente, no interesa la $\vec{V}$

↑ aplico rapido y de manera ciclica, si interesa $\vec{V}$.

σ

σ_{MAX}

Limite elastico

Limite PROP.

FLUENCIA

END. POR DEFORMACIÓN

ROTURA

ε

PROPIEDADES
- LINEALIDAD
- PLASTICIDAD
- ELASTICIDAD
- ISOTROPIA (PROP. IGUALES EN TODAS DIRECCIONES).
- ANISOTROPÍA
- ORTOTROPÍA = SIST. ORTOGONAL DONDE VEO LO MISMO
- HOMOGENEIDAD.

NOS INERESA ENCONTRAR EL

σ_{02} o σ_{FI} (fluencia) o σ_y

ademas σ_{ROTURA} $(\sigma_R = \sigma_U)$

LEY DE HOOKE

$$\sigma = E . \varepsilon$$

E : MODULO DE ELASTICIDAD

ε : DEF. UNITARIA

RELACIÓN DE POISSON (ν)

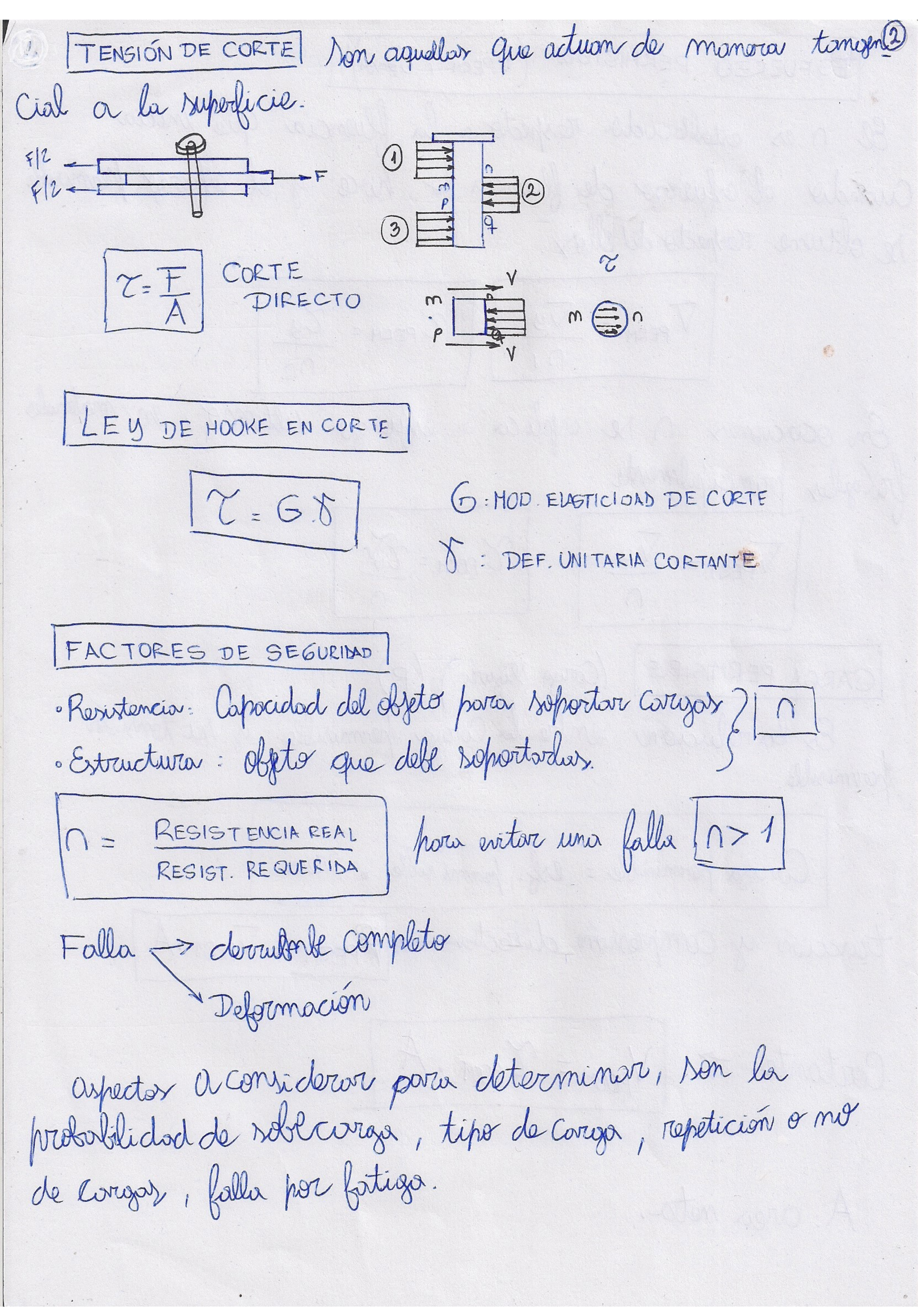
$$\nu = -\varepsilon_t / \varepsilon_L$$

ε_t es la def. transversal

ε_L es def. longitudinal.

↓ El alargamiento axial produce una contracción lateral

→ Sirve en comportamiento elastico y solo si se aplica unicamente una tensión NORMAL (UNIAXIAL)



TENSIÓN DE CORTE

Son aquellas que actuan de manera tangencial a la superficie.

$$\tau = \frac{F}{A}$$ CORTE DIRECTO

LEY DE HOOKE EN CORTE

$$\tau = G\,\gamma$$

G: MOD. ELASTICIDAD DE CORTE

γ: DEF. UNITARIA CORTANTE

FACTORES DE SEGURIDAD

- Resistencia: Capacidad del objeto para soportar cargas
- Estructura: objeto que debe soportarlas.

} n

$$n = \frac{\text{RESISTENCIA REAL}}{\text{RESIST. REQUERIDA}}$$

para evitar una falla $n > 1$

Falla → derrumbe completo
→ Deformación

aspectos a considerar para determinar, son la probabilidad de sobrecarga, tipo de carga, repetición o no de cargas, falla por fatiga.

ESFUERZO PERMISIBLE (σ_{PERM} ; τ_{PERM})

El n es establecido respecto a la fluencia que inicia cuando el esfuerzo de fluencia lo hace y el esfuerzo permisible se obtiene respecto de ellos.

$$\sigma_{PERM} = \frac{\sigma_y}{n_1} \qquad \tau_{PERM} = \frac{\tau_y}{n_2}$$

En ocasiones n se aplica a esfuerzo ultimo, en materiales frágiles principalmente

$$\sigma_{PERM} = \frac{\sigma_U}{n} \qquad \tau_{PERM} = \frac{\tau_U}{n}$$

CARGA PERMISIBLE (Carga segura) (P)

Es la relación entre la carga permisible y su tensión permisible.

Carga permisible = esf. permisible • area

tracción y compresión directa → $P_{PERM} = \sigma_{PERM} \cdot A$

Cortante → $V_{PERM} = \tau_{PERM} \cdot A$

A: area neta.

CENTROIDES Y MOMENTOS DE INERCIA

MECANICA DE LAS ESTRUCTURAS

UNIDAD II

CENTROIDES DE AREAS PLANAS

Su posición es una propiedad geométrica importante. Propia de cada superficie plana.

El area de la superficie esta dada por $A = \int dA$ (MOMENTO DE ORDEN CERO); el dA es un elemento diferencial de coordenadas x e y. y A es el area total de la figura.

MOMENTOS ESTÁTICOS: Con respecto a X e Y se definen respectivamente como

$$Q_x = \int y \cdot dA \qquad Q_y = \int x \cdot dA \qquad [in^3 \text{ o } mm^3]$$

los momentos estáticos son las sumas de los productos de las areas diferenciales y sus coordenadas. Pueden ser positivos o negativos. (Depende de la posición de los ejes X, Y)

Las coordenadas del CENTROIDE:

$$\bar{x} = \frac{Q_y}{A} = \frac{\int x \cdot dA}{\int dA} \qquad \bar{y} = \frac{Q_x}{A} = \frac{\int y \cdot dA}{\int dA}$$

Si un area es simétrica con respecto a un eje, el centroide se encuentra sobl dicho eje.

Si el area tiene dos ejes de simetría, la posición del centroide se determina por inspección

Se puede descomoner las areas complejas en areas sencillas y con las integrales hechas sumatorias puedo determinar C.

CENTROIDES DE AREAS COMPUESTAS

Las areas y momentos estáticos de areas compuestas se pueden calcular al sumar las propiedades correspondientes de las partes Constitutivas.

$$A = \sum A \qquad Q_x = \sum y.A \qquad Q_y = \sum x.A$$

MOMENTO DE INERCIA DE AREAS PLANAS

El momento de inercia de un area plana, esta definido por las siguientes integrales.

$$I_x = \int y^2 . dA \qquad I_y = \int x^2 . dA$$

x, e y son las coordenadas del elemento diferencial de dA. Se denominan Segundos Momentos de Inercia, siempre son Cantidades positivas.

y

h

c

B B

b

x

$$I_x = \int y^2 . dA = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 . b . dy = \frac{b.h^3}{12}$$

$dA = b\ dy$

$$I_y = \frac{h.b^3}{12}$$

$$I_{BB} = \frac{b.h^3}{3}$$

Define al Centroide y se pasa por el CG.

El momento de inercia aumenta conforme al eje de referencia se mueve paralelamente alejándose de C.

El I de un área compuesta con respecto a un eje, es la suma o resta de los momentos de inercia de sus partes con respecto a ese mismo eje.

RADIO DE GIRO

El radio de giro de un área plana se define como

$$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \qquad r_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \qquad [\text{UN. de longitud}]$$

Se lo considera como la distancia (desde el eje de referencia) a la que toda el área podría concentrarse en un punto y aun tener el mismo momento de inercia que el área original.

TEOREMA DE STAINER

proporciona la relación entre el momento de inercia con respecto a los ejes centroidales y el momento de inercia con respecto a cualquier otro eje.

$$I_x = I_{xc} + A d_1^2$$
$$I_y = I_{yc} + A d_2^2$$

"El momento de inercia de un área con respecto a cualquier eje en su plano es igual al momento de inercia con respecto a un eje centroidal paralelo mas el producto del area y el cuadrado de la distancia entre los ejes".

El momento de inercia mínimo se obtiene en un eje que pasa por el centro de gravedad.

MOMENTOS POLARES DE INERCIA

El momento de inercia con respecto a un eje perpendicular se denomina momento polar de inercia

Se define como $I_P = \int \rho^2 \cdot dA$

ρ es la distancia desde O hasta dA

se obtiene una imp. relación sabiendo que

$\rho^2 = x^2 + y^2$

$$I_P = \int \rho^2 . dA = \int (x^2+y^2)\, dA = \int x^2 . dA + \int y^2 . dA = I_x + I_y$$

$$\boxed{I_P = I_x + I_y}$$

El momento polar de inercia con respecto a un eje perpendicular al plano de la figura es igual a la suma de los momentos de inercia con respecto a dos ejes perpendiculares cualesquiera que pasen por ese mismo punto y que se encuentran en el plano de la figura.

TEOREMA DE LOS EJES PARALELOS PARA MOMENTOS POLARES DE INERCIA.

El momento polar de inercia de un área con respecto a cualquier punto O. en su plano es igual al momento polar de inercia con respecto al centroide "C" más el producto del area y el cuadrado de la distancia entre los puntos O y C.

$$(I_P)_O = (I_P)_C + A.d^2$$

$$d^2 = d_1^2 + d_2^2$$

PRODUCTOS DE INERCIA

Se define con respecto a un conjunto de ejes perpendiculares que se encuentran en el plano del área.

Se lo define como $I_{xy} = \int X.Y.dA$.

Cada elemento dif. de dA se multiplica por el producto de sus coordenadas, el PI puede ser entonces POSITIVO, NEGATIVO ó CERO

Un caso especial se presenta cuando uno de los ejes es un eje de simetría del area. El producto de inercia de un area es cero con respecto a cualquier par de ejes en el cual al menos uno de ellos es un eje de simetría del area.

TEOREMA DE LOS EJES PARALELOS PARA PRODUCTOS DE INERCIA.

El producto de inercia de un area con respecto a cualquier par de ejes en su plano es igual al producto de inercia con respecto a ejes centroidales paralelos mas el producto del area y las coordenadas del centroide con respecto al par de ejes.

$$I_{xy} = I_{x_c y_c} + A \cdot d_1 \cdot d_2$$

EJES PRINCIPALES

Los valores obtenidos en las ecuaciones de transformación (ecuaciones que muestran como varían los momentos de inercia en función de $\underline{\theta}$); estos valores se conocen como momentos de inercia principales, y los ejes correspondientes se conocen como ejes principales.

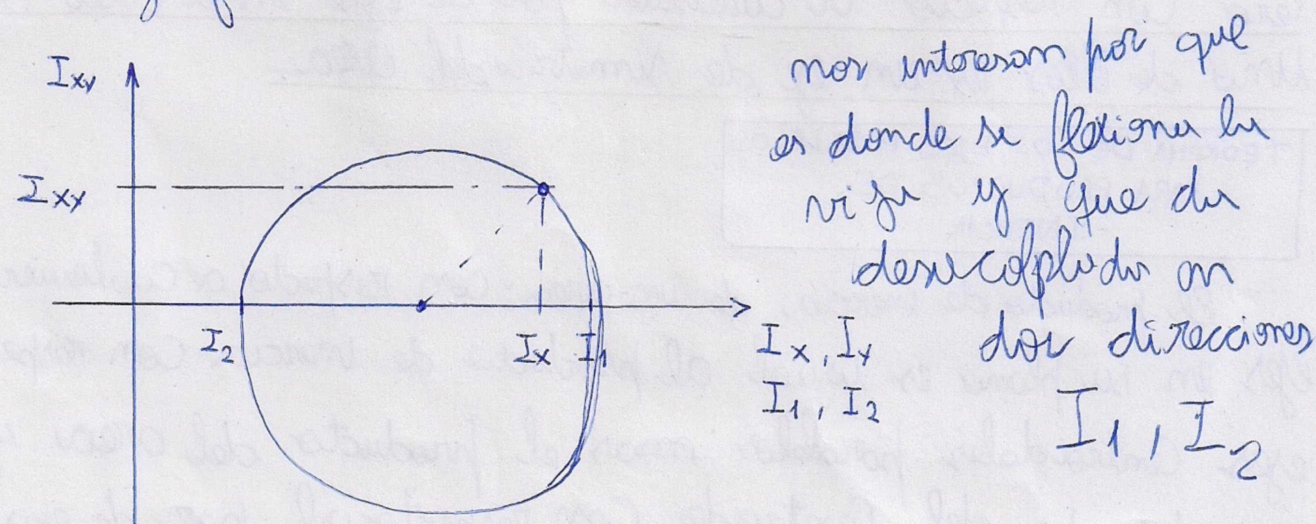
Los ejes principales que pasan por O son un par de ejes ortogonales para los cuales los momentos de inercia son un máximo y un mínimo.

La orientación de los ejes principales esta dada por el angulo θ_p obtenido de las ecuaciones.

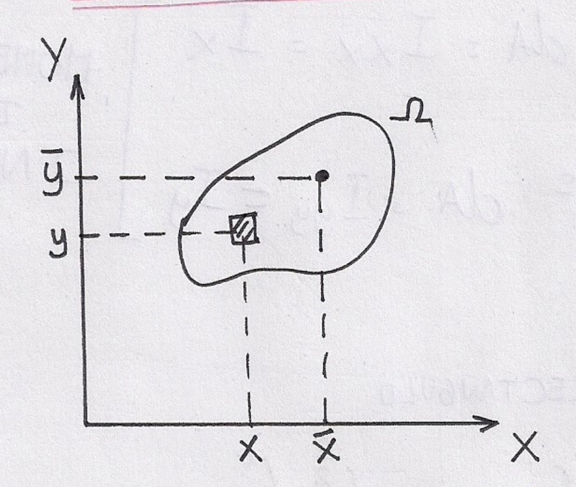
El producto de inercia es cero para los ejes principales

Un eje de simetría siempre es un eje principal.

Se puede determinar los máximos y mínimos mediante un método grafico conocido como el circulo de MOHR.



UNIDAD 2 : MOMENTOS DE INERCIA



MOMENTO DE AREA DE ORDEN "n"

$$M_{n,i} = \int_{\Omega} j^n \cdot dA \quad \begin{cases} i, j = x, y \\ i \neq j \end{cases}$$

MOMENTO DE ORDEN CERO respecto a X

$$M_{0,x} = \int_{\Omega} y^0 \cdot dA = \int_{\Omega} dA = A$$

AREA DE LA FIGURA

MOMENTO ESTATICO

$$M_{1,x} = \int_{\Omega} y^1 \cdot dA = Q_x = A \cdot \bar{y}$$

$$M_{1,y} = \int_{\Omega} x^1 \cdot dA = Q_y = A\bar{x}$$

Centroide: lugar donde tengo que concentrar el area para tener el mismo momento estatico.

Si pasa por el CG = 0.

El Centroide es un Concepto puramente geométrico el cual depende de la forma del sistema.

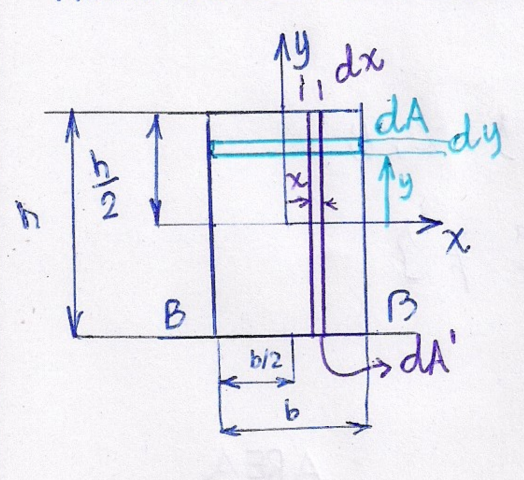
MOMENTO DE SEGUNDO ORDEN

$$M_{2,x} = \int_{\Omega} y^2 \cdot dA = I_{xx} = I_x$$

$$M_{2,y} = \int_{\Omega} x^2 \cdot dA = I_{yy} = I_y$$

MOMENTOS DE INERCIA

MOMENTO DE INERCIA DE UN RECTANGULO



$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^b y^2 \, dx \, dy =$$

$$= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 \, b \cdot dy = b \cdot \frac{y^3}{3} \Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \boxed{\frac{b \cdot h^3}{12}}$$

$$I_y = \int_A x^2 \cdot dA' = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_0^h x^2 \, dy \, dx$$

$$= \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} x^2 \cdot h \cdot dx = h \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} = \boxed{\frac{h \cdot b^3}{12}}$$

EJE B-B

$$I_{BB} = \int_A y^2 \, dA = \int_0^h \int_0^b y^2 \, dx \, dy = \int_0^h y^2 \cdot b \, dy = b \cdot \frac{y^3}{3} \Big|_0^h$$

$$\boxed{I_{BB} = \frac{b \cdot h^3}{3}}$$

TEOREMA DE STAINER.

$$I_x = \int_A (y+d_1)^2 \, dA$$ Def. MOM INERCIA

$$I_x = \int_A (y^2 + 2y \cdot d_1 + d_1^2)\, dA$$

$$I_x = \int_A y^2\, dA + \int_A 2 d_1 y\, dA + \int_A d_1^2 dA$$

$$I_x = I_{xc} + 2 d_1 \underbrace{\int_A y\, dA}_{=0} + d_1^2 \underbrace{\int_A dA}_{=A}$$

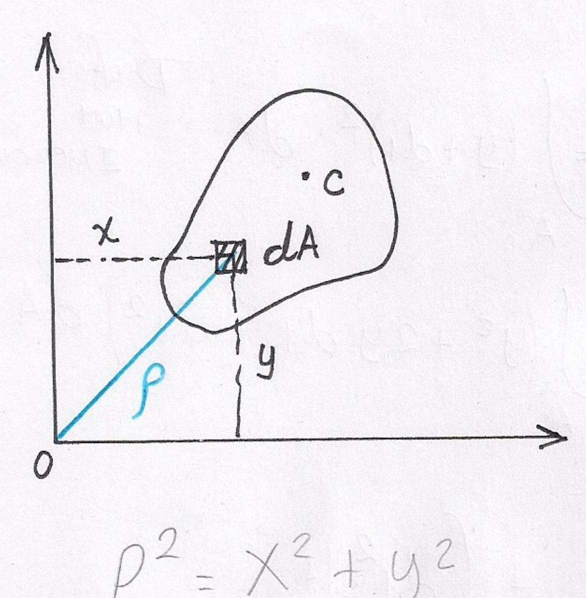
$$\boxed{I_x = I_{xc} + d_1^2 A}$$

$$I_y = \int_A (x+d_2)^2\, dA = \int_A (x^2 + 2x \cdot d_2 + d_2^2)\, dA$$

$$I_y = \int_A x^2\, dA + 2 d_2 \underbrace{\int_A x\, dA}_{=0} + d_2^2 \int_A dA$$

$$\boxed{I_y = I_{y_c} + d_2^2 \cdot A}$$

MOMENTO DE INERCIA POLAR (I_p)



$$I_p = \int \rho^2 \, dA$$

$$I_p = \int_A \rho^2 \, dA$$

$\rho^2 = x^2 + y^2$

$$I_p = \int_A (x^2 + y^2)\, dA =$$

$$I_p = \underbrace{\int_A x^2 \, dA}_{I_y} + \underbrace{\int_A y^2 \, dA}_{I_x}$$

$$\boxed{I_p = I_x + I_y}$$

$(I_p)_0 = I_x + I_y$

$(I_p)_C = I_{x_C} + I_{y_C}$

$I_x = I_{x_C} + d_1^2 A$

$I_y = I_{y_C} + d_2^2 \cdot A$

$$I_x + I_y = I_{x_C} + d_1^2 \cdot A + I_{y_C} + d_2^2 \cdot A$$

$d^2 = d_1^2 + d_2^2$

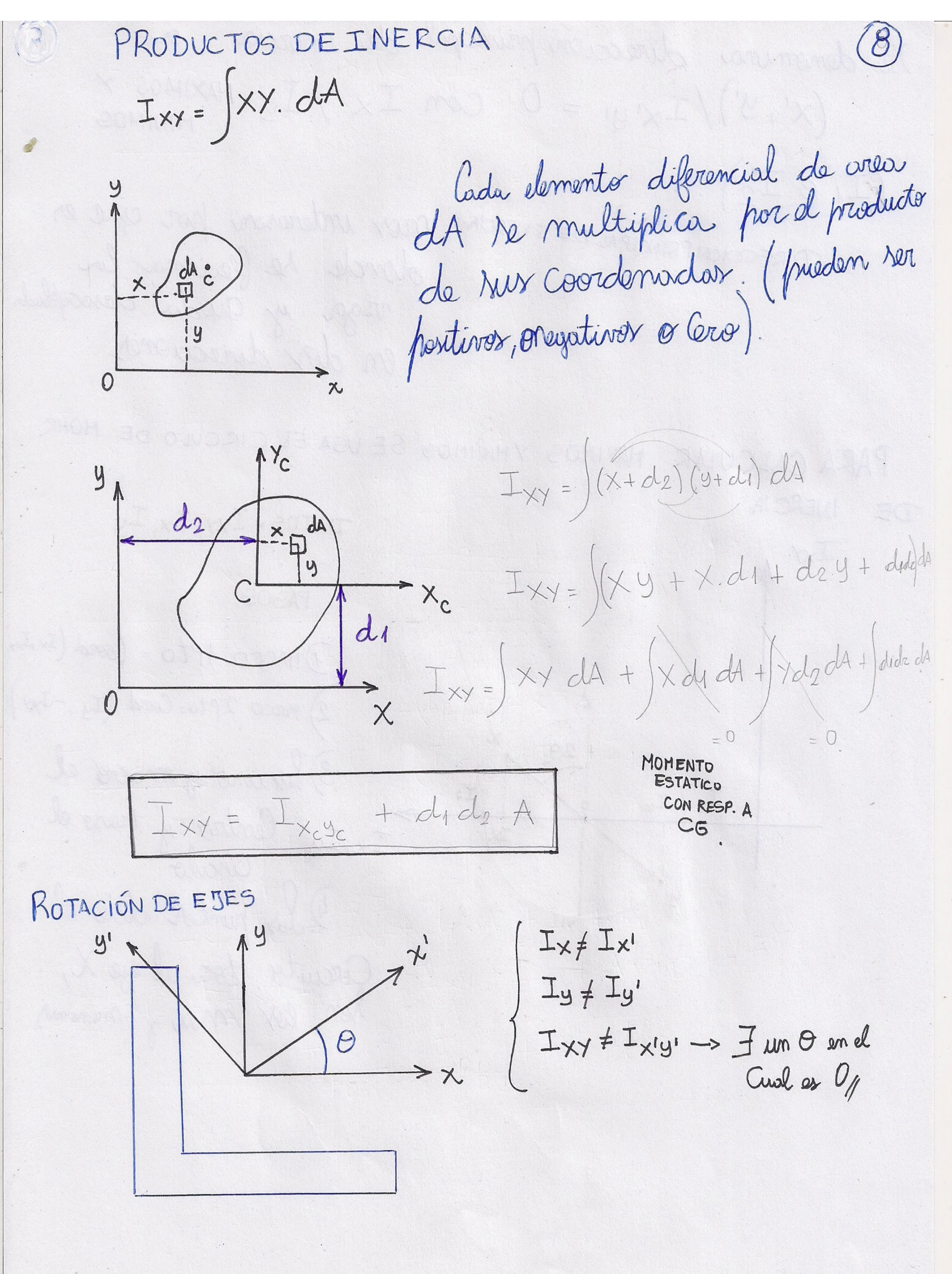
$$I_x + I_y = I_{x_C} + I_{y_C} + A\left(d_1^2 + d_2^2\right)$$

$$\boxed{I_{P_0} = I_{P_C} + A \cdot d^2}$$

PRODUCTOS DE INERCIA

$$I_{xy} = \int xy \cdot dA$$

Cada elemento diferencial de area dA se multiplica por el producto de sus coordenadas. (pueden ser positivos, negativos o cero).



$$I_{xy} = \int (x + d_2)(y + d_1)\, dA$$

$$I_{xy} = \int (xy + x \cdot d_1 + d_2 y + d_1 d_2)\, dA$$

$$I_{xy} = \int xy\, dA + \int x d_1\, dA + \int y d_2\, dA + \int d_1 d_2\, dA$$

$= 0$ $\quad = 0$

MOMENTO ESTATICO CON RESP. A CG.

$$I_{xy} = I_{x_c y_c} + d_1 d_2 \cdot A$$

ROTACIÓN DE EJES

$I_x \neq I_{x'}$

$I_y \neq I_{y'}$

$I_{xy} \neq I_{x'y'} \rightarrow \exists$ un θ en el cual es 0

Se denomina dirección principal de inercia a $(x', y') / I_{x'y'} = 0$ con I_x, I_y MAXIMOS Y MINIMOS (I_1 e I_2).

DIRECCION PRINCIPAL DE INERCIA: nos interesan por que es donde se flexiona la viga y queda desacoplada en dos direcciones

PARA CALCULAR MAXIMOS Y MINIMOS SE USA EL CIRCULO DE MOHR DE INERCIA

I_{xy}, x', 2θ, x, I_2, I_y, c, I_1, I_x, I_x, I_y, y, y'

DATOS = I_{xy}, I_x, I_y

PASOS

1) MARCO 1pto = Coord (I_x, I_{xy})
2) MARCO 2pto = Coord (I_y, $-I_{xy}$)
3) Los uno y marco el Centro y trazo el Círculo
4) Los puntos dde el Circuito toca al eje X, son los max y minimos

AXIAL UNIDAD III

Las barras cargadas axialmente sufren alargamientos con esfuerzos de tracción y acortamientos con esfuerzos de compresión.

BARRA PRISMATICA: es un elemento estructural que posee un eje longitudinal recto y una sección transversal constante en toda su longitud.

HIPÓTESIS

En esta teoría se toma que la carga "P" se aplica en el centroide de la sección transversal externa. Tambien se supone que el material es linealmente elastico. (OBEDECE LA LEY DE HOOKE).

$$\delta = \frac{P.L}{E.A}$$

Ecuacion para el alargamiento de la barra. El alargamiento es directamente proporcional a la carga P y a la longitud L e inversamente proporcional al modulo E y al area de la sección transversal A.

E.A se lo conoce como RIGIDEZ AXIAL de la barra.

La ecuación sirve para la tracción y tambien para la compresión, en ese caso ultimo el "δ" representa el ACORTAMIENTO.

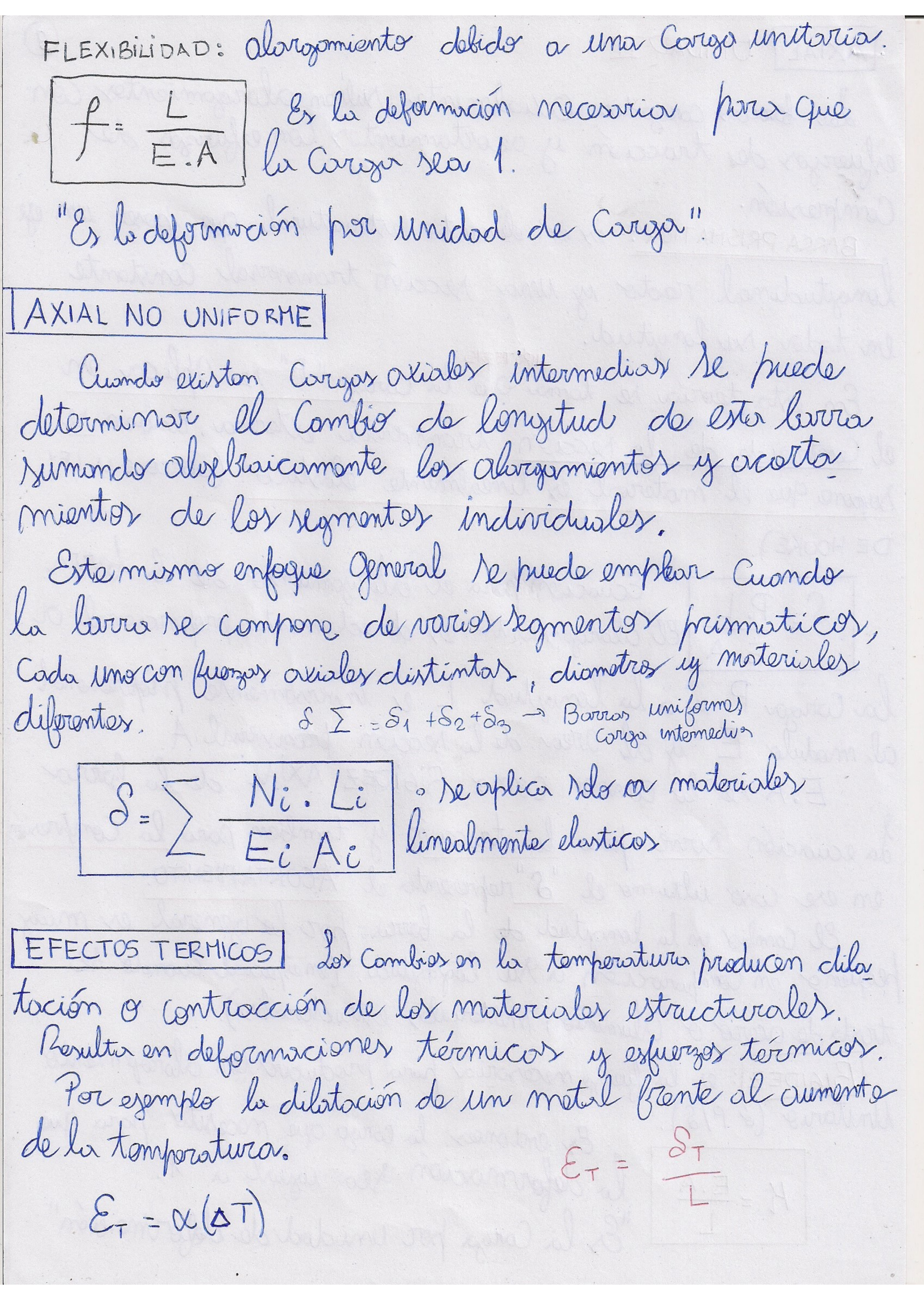
El cambio en la longitud de la barra por lo general es muy pequeño en comparación a su longitud. (en especial cuando se trata de acero o aluminio; materiales estructurales).

RIGIDEZ: es la fuerza necesaria para producir un alargamiento unitario (ó P/δ).

$$K = \frac{E.A}{L}$$

Es entonces la carga que necesito para que la deformación sea igual a 1.

"Es la carga por unidad de deformación"



FLEXIBILIDAD: alargamiento debido a una Carga unitaria.

$$f = \frac{L}{E.A}$$

Es la deformación necesaria para que la Carga sea 1.

"Es la deformación por unidad de Carga"

AXIAL NO UNIFORME

Cuando existan Cargas axiales intermedias se puede determinar el Cambio de longitud de esta barra sumando algebraicamente los alargamientos y acortamientos de los segmentos individuales.

Este mismo enfoque General se puede emplear Cuando la barra se compone de varios segmentos prismaticos, Cada uno con fuerzas axiales distintas, diametros y materiales diferentes.

$\delta \sum = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 \rightarrow$ Barras uniformes Carga intermedia

$$\delta = \sum \frac{N_i \cdot L_i}{E_i A_i}$$

∘ se aplica solo a materiales linealmente elasticos

EFECTOS TERMICOS

Los Cambios en la temperatura producen dilatación o contracción de los materiales estructurales.

Resulta en deformaciones térmicas y esfuerzos térmicos.

Por ejemplo la dilatación de un metal frente al aumento de la temperatura.

$$\varepsilon_T = \frac{\delta_T}{L}$$

$$\varepsilon_T = \alpha(\Delta T)$$

α es el Coef de dilatación termica

$\alpha \left[1/°C \text{ ó } 1/°K \right]$

la Convención de signos usual es que las dilataciones son positivas y las Contracciones son negativas.

$$\boxed{\delta_T = \varepsilon_T \cdot L = \alpha \cdot (\Delta T) \cdot L}$$

es una relación temperatura Desplazamiento.

Analoga a las relaciones de fuerza desplazamiento.

ESFUERZOS SOBRE SECCIONES INCLINADAS

se tiene una barra P., linealmente elastica sometida a un esfuerzo de tracción

si Cortamos la barra en una sección transversal, por un plano m-m (PERP A X)

y, m, P, C, m, $\sigma_x = \frac{P}{A}$, P, x

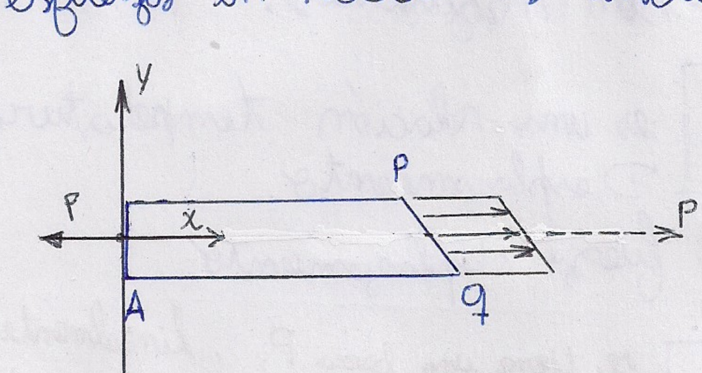
los esfuerzos normales se calculan usando $\sigma_x = \frac{P}{A}$ siempre que la distribución del esfuerzo sea uniforme sobre el area de la sección transversal A. (si la barra es prismática, el material es homogeneo y la fuerza axial P actua en el Centroide del area de la sección transversal, esta alejada de cualquier Concentración de esfuerzos).

se suele hacer mas comoda la representación mediante un trozo de material "C", para representar los esfuerzos en sus Caras. se denomina ELEMENTO DE ESFUERZO.

y, σ_x, σ_x, O, x

Lo mostrado anteriormente solo ofrece una vista limitada de los esfuerzos en una barra cargada axialmente.

Es necesaria una investigación completa, necesitamos ver los esfuerzos en secciones inclinadas.



Se debe especificar el angulo θ entre x y la normal "n" de la sección.

La resultante de los esfuerzos es una fuerza P en la dirección X. Posee dos componentes, una NORMAL "N" y una CORTANTE "V".

$$N = P \cdot \cos \theta \qquad V = P \cdot \operatorname{sen} \theta$$

Se tienen esfuerzos normales y de corte distribuidos de manera uniforme sobre la sección inclinada.

$$\sigma = \frac{N}{A_1} \; ; \; \tau = \frac{V}{A_1} \; ; \; A_1 = \frac{A}{\cos \theta}$$

y, n, P, p, x, θ, q

(N) (V)

$$\sigma_\theta = \frac{N}{A_1} \qquad \tau_\theta = \frac{V}{A_1}$$

$$A_1 = \frac{A}{\cos \theta}$$

Se utiliza el subíndice θ para indicar los esfuerzos que actúan
sobre una sección inclinada a un ángulo θ.

σ_θ es positivo en tracción, τ_θ es positivo cuando quiere producir una rotación en sentido antihorario.

Se deduce por estática que:

$$\sigma_\theta = \sigma_x \cdot \cos^2\theta = \frac{\sigma_x}{2}(1+\cos 2\theta)$$
$$\tau_\theta = -\sigma_x \operatorname{sen}\theta \cdot \cos\theta = -\frac{\sigma_x}{2}(\operatorname{sen} 2\theta)$$

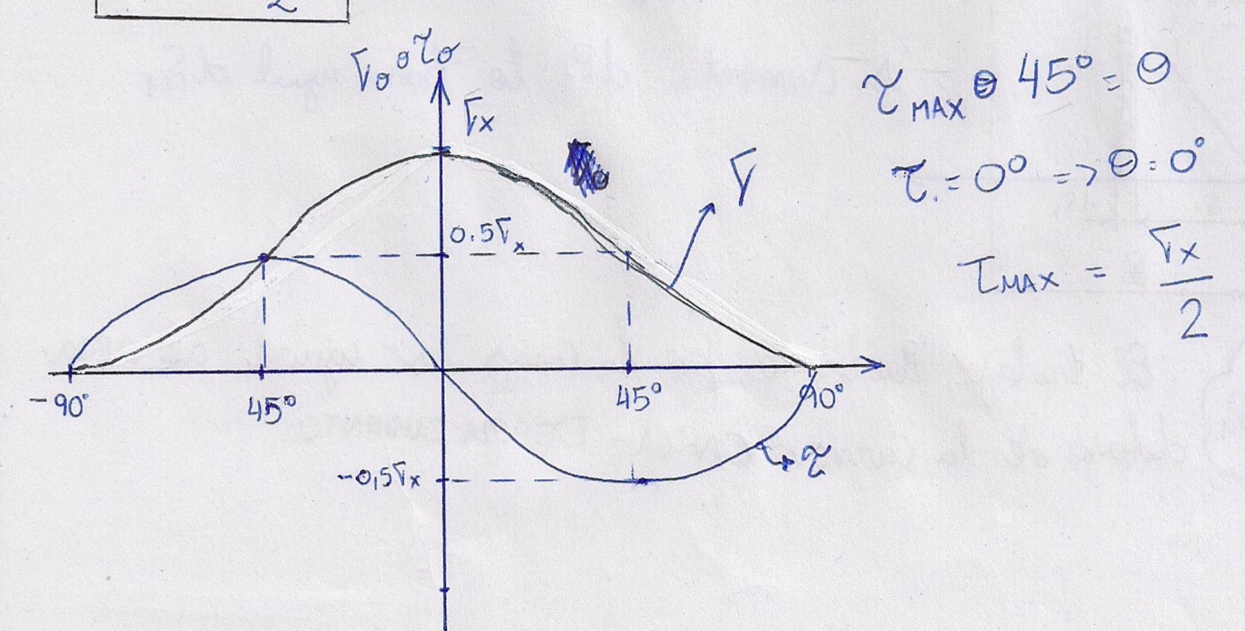
Son independientes del material, son válidos para cualquier material, ya sea que se comporte lineal o no linealmente, elástica o inelásticamente.

ESFUERZOS NORMALES Y CORTANTES MÁXIMOS

El esfuerzo normal es máximo cuando $\theta = 0$ y es $\sigma_{MAX} = \sigma_x$.

Cuando $\theta = \pm 45°$, el N es la mitad del valor máximo. τ_θ es igual a 0 en $\theta = 0°$ (y en $\theta \pm 90°$). es positivo con $\theta = -45$ y negativo

$$\tau_{MAX} = \frac{\sigma_x}{2}$$ Con $\theta = 45°$



τ_{MAX} θ $45° = \theta$

$\tau = 0° \Rightarrow \theta = 0°$

$$\tau_{MAX} = \frac{\sigma_x}{2}$$

ENERGÍA DE DEFORMACIÓN es un concepto fundamental en la mecanica aplicada, sus principios se usan ampliamente para determinar la respuesta de maquinas estructuras sometidos a cargas estaticos y dinamicos.

Se considera nuevamente una barra prismática, con longitud L sometida a una fuerza de tensión P; la carga se aplica lentamente (Proceso de carga estatico); no hay efectos dinamicos o inerciales debido a movimientos

La carga P realiza una cierta cantidad de trabajo. El trabajo es igual al producto de la fuerza por la distancia, sin embargo, la fuerza varia de 0 hasta P; debemos conocer como varia la fuerza para poder calcular el trabajo. La información me la proporciona el DIAGRAMA DE CARGA-DESPLAZAMIENTO

① P_1 es un valor entre 0 y P

② δ_1 es u alargamiento correspondiente

si aumenta dP_1 lo hara igual $d\delta_1$

$$W = \int_0^{\delta} P_1 \cdot d\delta_1$$

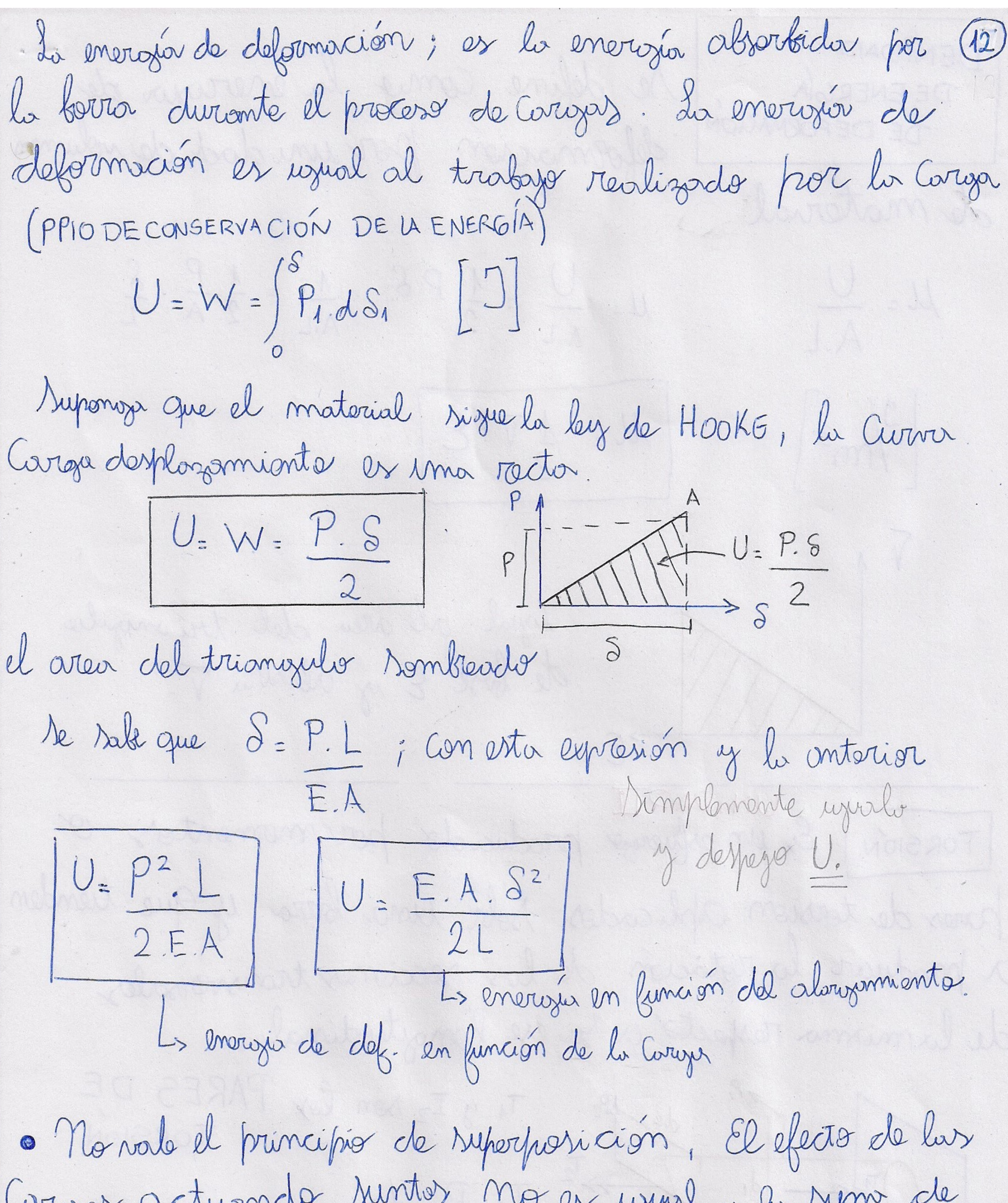
El trabajo realizado por la carga es igual al area debajo de la curva CARGA-DESPLAZAMIENTO.

La energía de deformación; es la energía absorbida por la barra durante el proceso de cargas. La energía de deformación es igual al trabajo realizado por la carga (PPIO DE CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA)

$$U = W = \int_0^{\delta} P_1 \cdot d\delta_1 \quad [J]$$

Suponga que el material sigue la ley de HOOKE, la curva carga desplazamiento es una recta.

$$\boxed{U = W = \frac{P \cdot \delta}{2}}$$



el area del triangulo sombreado

se sabe que $\delta = \dfrac{P \cdot L}{E \cdot A}$; con esta expresión y la anterior

Simplemente igualo y despejo U.

$$\boxed{U = \frac{P^2 \cdot L}{2 \cdot E \cdot A}} \qquad \boxed{U = \frac{E \cdot A \cdot \delta^2}{2L}}$$

↳ energía en función del alargamiento.

↳ energía de def. en función de la carga

- No vale el principio de superposición, El efecto de las cargas actuando juntas no es igual a la suma de los efectos.

DENSIDAD DE ENERGÍA DE DEFORMACIÓN Se define como la energía de deformación por unidad de volumen de material

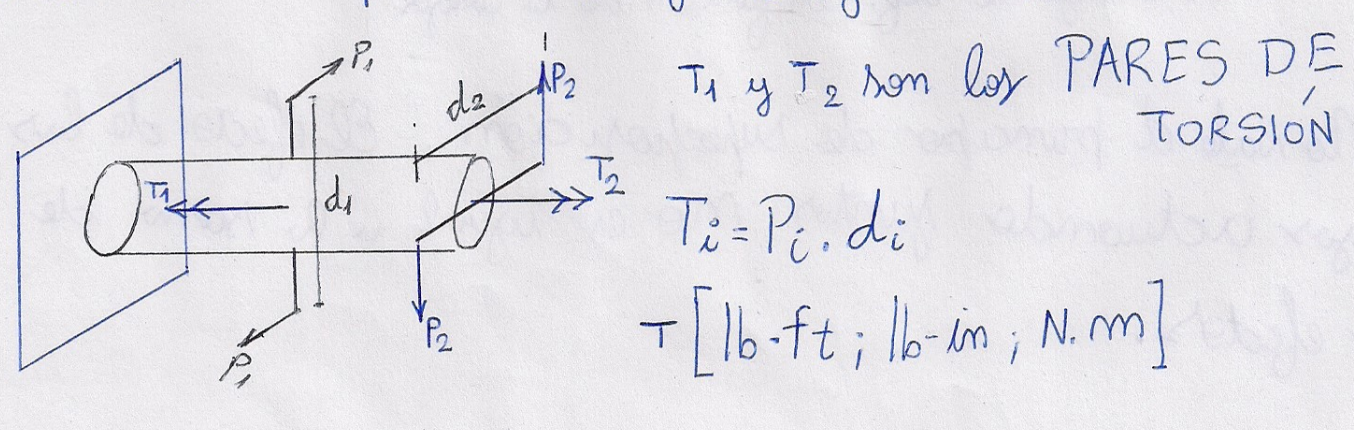
$$\mu = \frac{U}{A.L} \qquad \mu = \frac{U}{A.L} = \frac{1}{2} P.\delta \cdot \frac{1}{A.L} = \frac{1}{2}\frac{P}{A}\cdot\frac{\delta}{L}$$

$$\left[J/m^3 \right] \qquad \boxed{\mu = \frac{1}{2}\sigma . \varepsilon}$$

Igual al area del triangulo de base ε y altura σ.

UNIDAD IV

TORSIÓN Es un esfuerzo producido por momentos o pares de torsión aplicados sobre una barra y que tienden a producir la rotación de las secciones transversales de la misma respecto a su eje longitudinal.



T_1 y T_2 son los PARES DE TORSIÓN

$$T_i = P_i . d_i$$

T [lb-ft ; lb-in ; N.m]

El estudio comienza al considerar una barra en (PRISMAT) con sección transversal circular torcida por pares T que actuan en sus extremos. Cada sección transversal de la barra es identica, cada sección transversal se somete al mismo par de torsión interno T. Se dice que esta en torsión pura.

- Las secciones transversales permanecen planas y circulares y todos los radios rectos. Si el angulo de rotación entre un extremo de la barra y el otro es pequeño, no cambian la longitud de la barra ni sus radios. (RELACIÓN CINEMATICA).

La hipotesis entonces para una barra circular sometida a torsión es que esta permanece constante con su forma y longitud original, y sus secciones transversales planas (Para pequeños angulos de rotación).

DEFORMACIÓN UNITARIA POR CORTANTE

$$ds = d\phi \cdot r$$

$$\boxed{\gamma_{MAX} = \frac{b.b'}{ab}}$$ magnitud de la deformación por cortante en la superficie de la barra.

γ_{MAX} se mide en radianes

Siendo r el radio de la barra se puede expresar a bb' como $r\, d\phi$, donde $d\phi$ esta en rad.

$$\gamma_{MAX} = \frac{r.d\phi}{dx}$$

↑ DEF. POR CORTE

Siendo $\theta = \frac{d\phi}{dx}$ la razon de cambio del angulo de torsión ϕ con respecto a la distancia X medida a lo largo del eje de la barra. θ sera conocida como RAZÓN DE TORSIÓN Ó ANG. DE TORSIÓN POR UNIDAD DE LONGITUD

$$\boxed{\gamma_{MAX} = \frac{r.d\phi}{dx} = r.\theta}$$

Se considera por conveniencia una barra sujeta a torsión pura.

En torsion pura es valido

$$\boxed{\gamma_{MAX} = r.\theta = \frac{r.\phi}{L}}$$

para fibra. interior. uso P. anterior.

DEFORMACIÓN UNITARIA POR V DENTRO DE LA BARRA

Se puede utilizar el mismo método que se usó para encontrar γ_{MAX} en la superficie. (14)

Siendo ρ el radio interior; los radios de las secciones transversales permanecen rectos y sin distorsión durante la torsión.

Los elementos interiores también están en cortante puro con las deformaciones unitarias por cortante correspondientes dados por la ecuación

$$\gamma = \rho \cdot \theta = \frac{\rho}{r_{MAX}} \cdot \gamma_{MAX}$$

Las deformaciones unitarias cortantes en una barra circular varían linealmente con la distancia radial ρ desde el centro y alcanza su máximo con γ_{MAX} en la superficie exterior.

TUBO CIRCULAR

Las ecuaciones vistas o descriptas antes se pueden aplicar a los tubos circulares.

En este caso existirá un γ_{MAX} y un γ_{MIN}

$$\gamma_{MAX} = \frac{r_2 \cdot \phi}{L}$$

$$\gamma_{MIN} = \frac{r_1}{r_2} \gamma_{MAX} = \frac{r_1 \cdot \phi}{L}$$

γ_{MAX}

γ_{MIN}

r_1

r_2

Las ecuaciones están limitadas a ángulos de torsión pequeños.

BARRAS CIRCULARES DE MAT. LIN ELASTICOS

Se emplea la ley de HOOKE en cortante

$\tau = G \cdot \gamma$ → DEF. UNITARIA POR CORTANTE. EN RADIANES.

↳ MOD DE ELASTICIDAD TRANSVERSAL

$\tau_{MAX} = G \cdot r \cdot \theta$

$\tau = G \cdot \rho \cdot \theta = \frac{\rho}{r} \cdot \tau_{MAX}$

las ecuaciones se obtienen combinando la ley de Hooke con las ecuaciones para deformaciones unitarias.

FORMULA DE TORSION — Muestra la relación entre los esfuerzos cortantes y el par de torsión T.

TUBOS BARRAS ← $\tau_{MAX} = \frac{T \cdot r}{I_p}$ esta ecuación muestra que el esfuerzo de corte máximo es proporcional al par de torsión aplicado T e inversamente proporcional al momento polar de inercia I_p.

T [N.m] [lb-ft] [lb-in]

I_p [m^4] [in^4]

τ [Pa] [PSI]

Si $r = \frac{d}{2}$; $I_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32}$

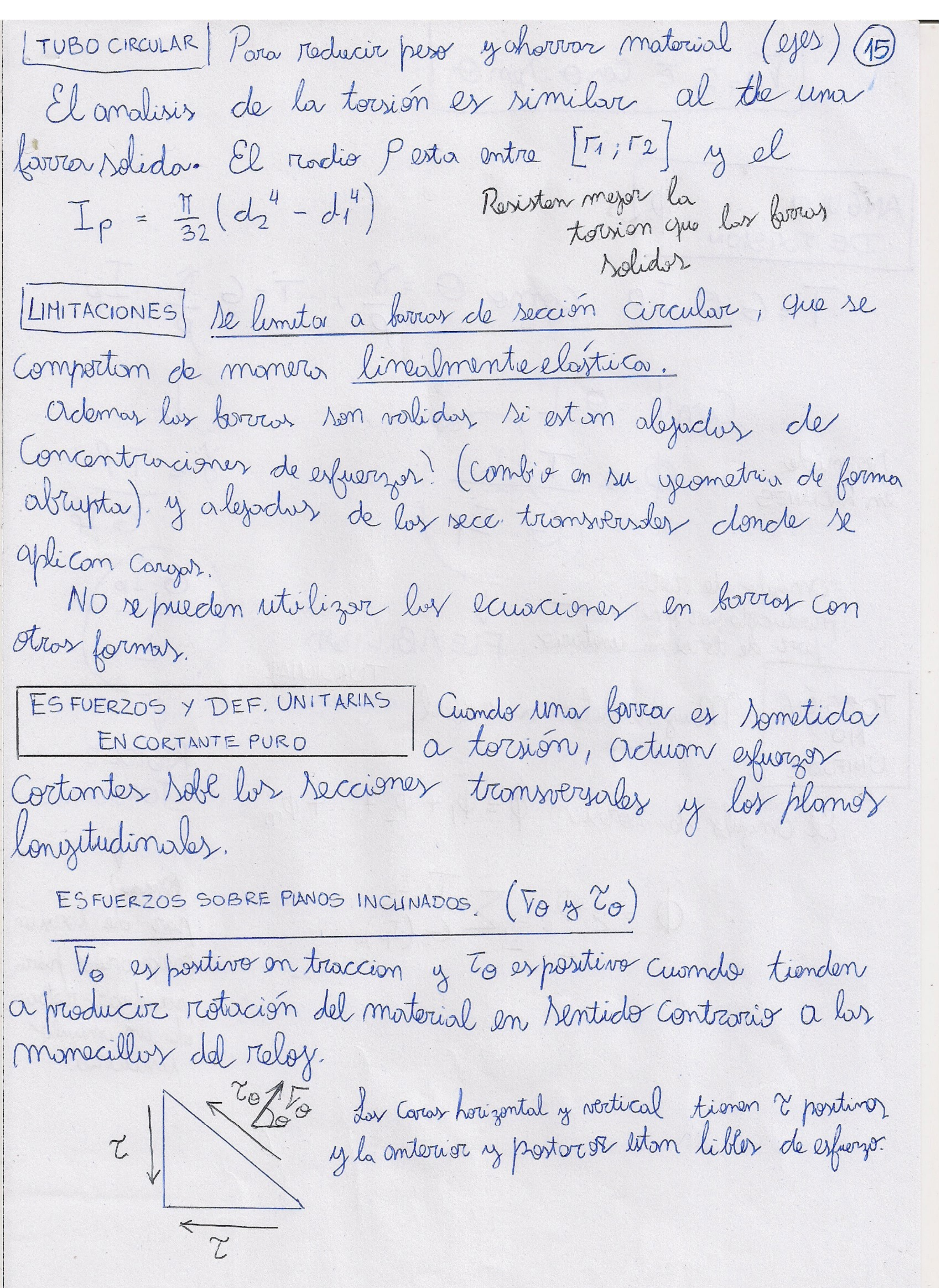
Con estas dos ultimas se obtiene $\tau_{MAX} = \frac{16\,T}{\pi \cdot d^3}$

El esfuerzo de corte es inversamente prop. al cubo del diametro.

Solo aplica a barras con sección circular transversal sólida.

SI DUPLICO el diametro, el esfuerzo se reduce en factor de 8.

$\tau = \frac{\rho}{r} \cdot \tau_{MAX} = \frac{T \cdot \rho}{I_p}$ es una formula generalizada de torsión y de nuevo se observan que los esf. cortantes varian linealmente con la distancia radial desde el centro a la barra.



TUBO CIRCULAR Para reducir peso y ahorrar material (ejes)

El analisis de la torsión es similar al de una barra solida. El radio ρ esta entre $[r_1 ; r_2]$ y el

$$I_p = \frac{\pi}{32}(d_2^4 - d_1^4)$$

Resisten mejor la torsion que las barras solidas

LIMITACIONES Se limita a barras de sección circular, que se comportan de manera linealmente elástica.

Ademas las barras son validas si estan alejadas de concentraciones de esfuerzos! (cambio en su geometria de forma abrupta). y alejadas de las secc. transversales donde se aplican cargas.

NO se pueden utilizar las ecuaciones en barras con otras formas.

ESFUERZOS Y DEF. UNITARIAS EN CORTANTE PURO Cuando una barra es sometida a torsión, actuan esfuerzos cortantes sobre las secciones transversales y los planos longitudinales.

ESFUERZOS SOBRE PLANOS INCLINADOS. (σ_θ y τ_θ)

σ_θ es positivo en traccion y τ_θ es positivo cuando tienden a producir rotación del material en sentido contrario a las manecillas del reloj.

Las caras horizontal y vertical tienen τ positivas y la anterior y posterior estan libres de esfuerzo.

$$\sigma_\theta = 2\,\tau \cdot \cos\theta \cdot \operatorname{sen}\theta$$

ANGULO DE TORSIÓN ϕ

$T = G \cdot \theta \cdot I_p$ como $\theta = \dfrac{\gamma}{\rho}$, $T = G \cdot \dfrac{\gamma}{\rho} \cdot I_p$

Con $\phi = \theta \cdot L$

Se mide en RADIANES

$$\phi = \frac{T \cdot L}{G \cdot I_p}$$

$$\gamma = \frac{T\rho}{G \cdot I_p}$$

$\dfrac{L}{G \cdot I_p}$ → FLEXIBILIDAD TORSIONAL ← angulo de rot. producido por un par de torsión unitario.

$\dfrac{G \cdot I_p}{L}$ → RIGIDEZ TORSIONAL → Angulo par de torsión necesario para producir rotación de un angulo unitario.

TORSIÓN NO UNIFORME

Muy similar a axial

El angulo de torsión $\phi = \phi_1 + \phi_2 + \ldots + \phi_m$

$$\phi = \sum \phi_i = \sum \frac{T_i L_i}{G_i (I_p)_i}$$

τ, −90, −45, 0, 45, 90, τ_θ, σ_θ, −τ

$$\sigma_\theta = \tau \cdot sen2\theta$$

$$\tau_\theta = \tau \cdot \cos 2\theta$$

para $\theta = 0 \to \sigma_\theta = 0$ y $\tau_\theta = \tau$

↳ Contrario al sentido horario

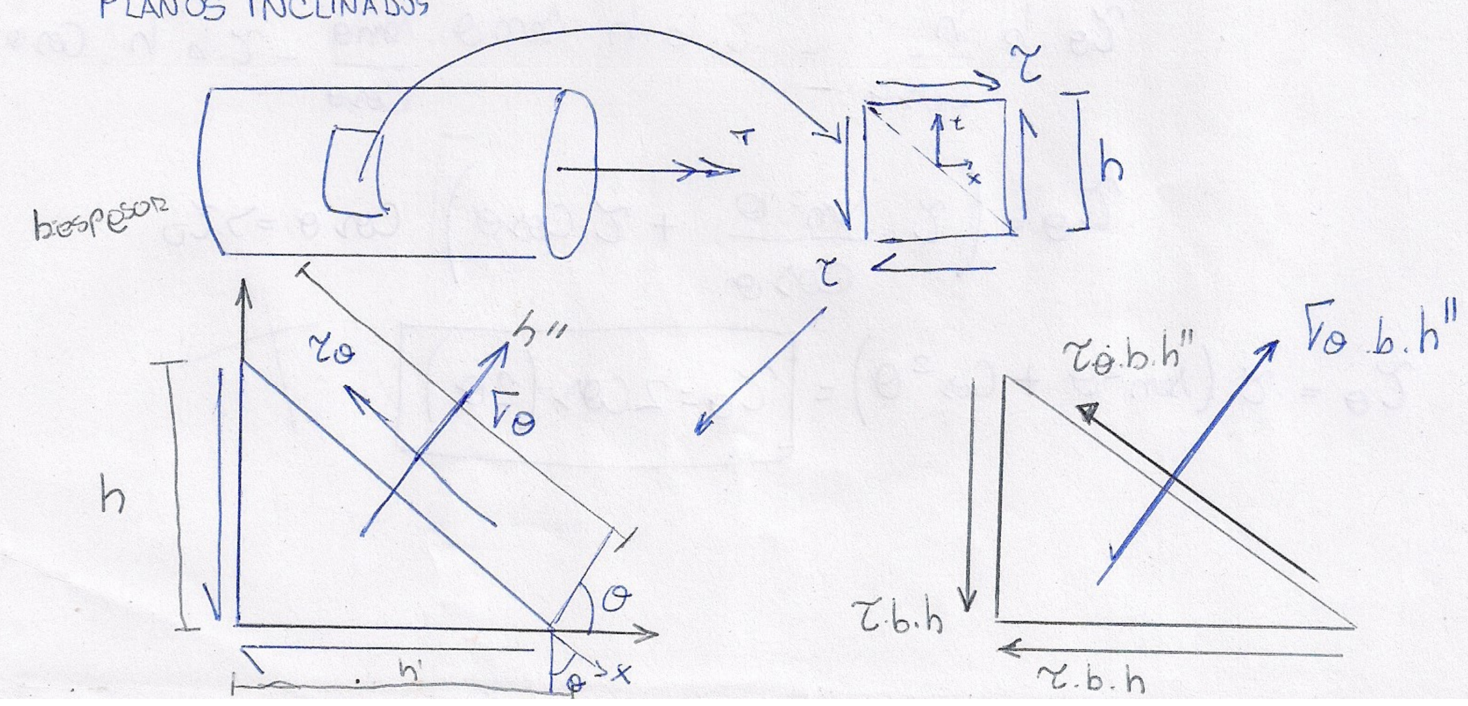
para $\theta = 90° \to \sigma_\theta = 0$ y $\tau_\theta = -\tau$

↳ HORARIO

Los esfuerzos cortantes mayores ocurren en $\theta = 0°$ y $\theta = 90°$

Los esfuerzos normales σ_θ alcanza un máximo en $\theta = 45°$. Traccion y Compresión iguales, sin corte.

ESFUERZOS
SOBRE
PLANOS INCLINADOS



POR TRIGONOMETRÍA

$$= \begin{cases} h'' = h/\cos\theta \\ h' = h \cdot tg\,\theta \end{cases}$$

t'

t

x'

θ

$\tau_\theta . b . h''$

$\tau . b h'$

x

θ

$\tau . b . h$

$$\Sigma F x' = 0 \Rightarrow \sigma_\theta . b . h'' - \tau . b . h . sen\theta - \tau . b . h' . \cos\theta = 0$$

$$= \sigma_\theta . b . \frac{h}{\cos\theta} - \tau . b . h . sen\theta - \tau . b . h$$

$$\cos\theta . tg\,\theta$$

$$= \sigma_\theta = (\tau . sen\theta + \tau . sen\theta) . \cos\theta$$

$$\boxed{\sigma_\theta = \tau . sen\,2\theta} \Leftarrow \boxed{\sigma_\theta = 2\tau . sen\theta . \cos\theta}$$

$$\Sigma F y' = 0 \Rightarrow \tau_\theta . b . h'' - \tau . b . h' . sen\theta - \tau . b . h . \cos\theta$$

$$\tau_\theta . b . \frac{h}{\cos\theta} - \tau . b . h . sen\theta . \frac{sen\theta}{\cos\theta} - \tau . b . h . \cos\theta$$

$$\tau_\theta = \left(\tau . \frac{sen^2 . \theta}{\cos\theta} + \tau . \cos\theta\right)$$

$$\tau_\theta = \tau . (sen^2\theta + \cos^2\theta) = \boxed{\tau_\theta = 2\cos(2\theta)}$$

RELACIÓN E y G

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

E y G no son propiedades independientes de un material linealmente elástico.

$$\frac{E}{3} \leqslant G \leqslant \frac{E}{2}$$

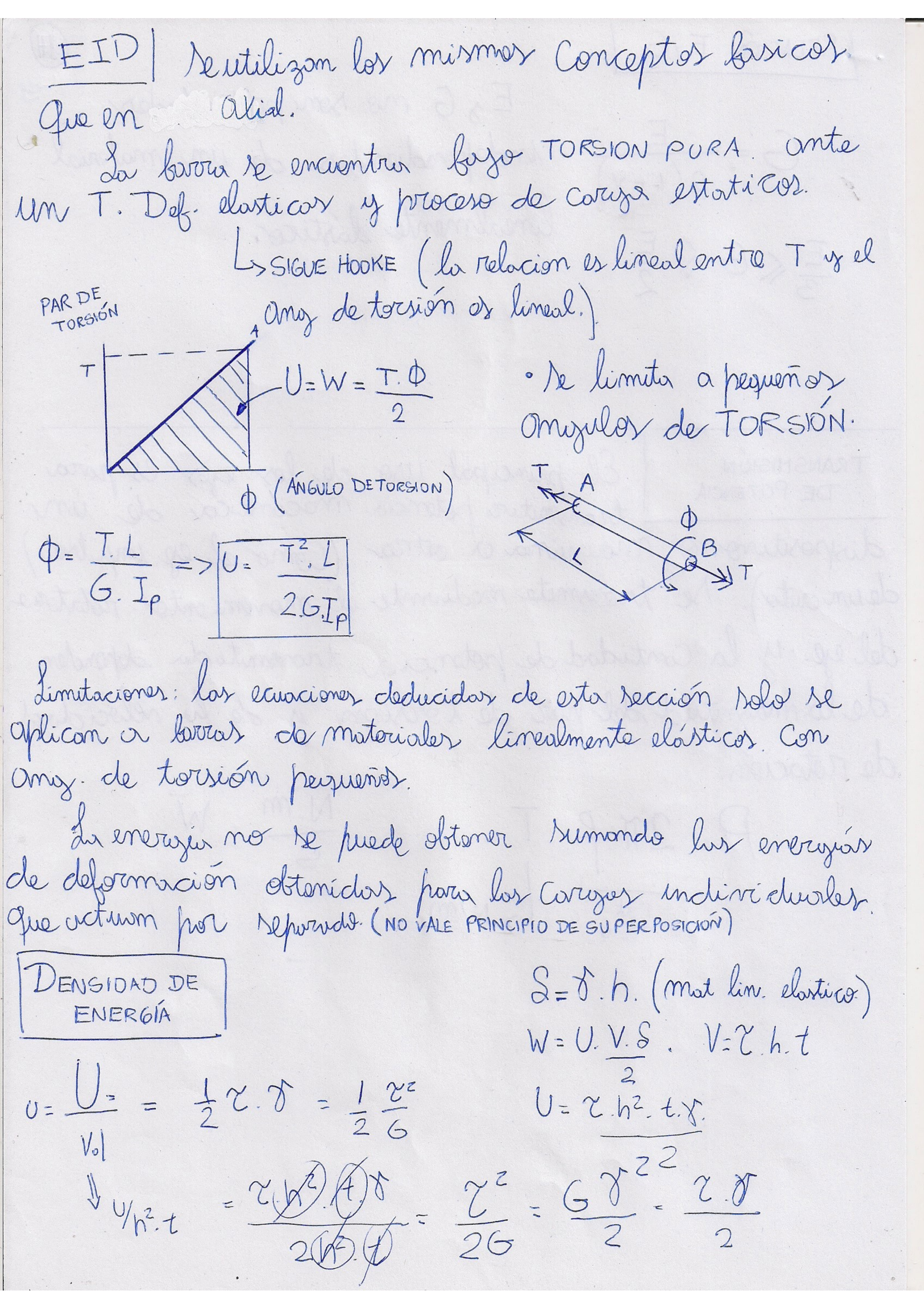
TRANSMISIÓN DE POTENCIA

El principal uso de los ejes es para transmitir potencia mecánica de un dispositivo o máquina a otra. (Como el eje impulsor de un auto). Se transmite mediante el movimiento rotatorio del eje. y la cantidad de potencia transmitida dependen de la magnitud del par de torsión. y de la velocidad de rotación.

$$P = 2\pi . f \; T \qquad \frac{N.m}{s} = W$$

f → rad/s ≠ G

T → N m



EID | Se utilizan los mismos conceptos básicos que en Axial.

La barra se encuentra bajo TORSION PURA ante un T. Def. elásticas y proceso de carga estáticos.

↳ SIGUE HOOKE (la relación es lineal entre T y el ang de torsión es lineal.)

$U = W = \frac{T \cdot \phi}{2}$

• Se limita a pequeños ángulos de TORSIÓN.

$$\phi = \frac{T \cdot L}{G \cdot I_p} \Rightarrow \boxed{U = \frac{T^2 \cdot L}{2 G I_p}}$$

Limitaciones: las ecuaciones deducidas de esta sección solo se aplican a barras de materiales linealmente elásticos con ang. de torsión pequeños.

La energía no se puede obtener sumando las energías de deformación obtenidas para las cargas individuales que actúan por separado. (NO VALE PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN)

DENSIDAD DE ENERGÍA

$\delta = \gamma \cdot h$ (mat lin. elástico)

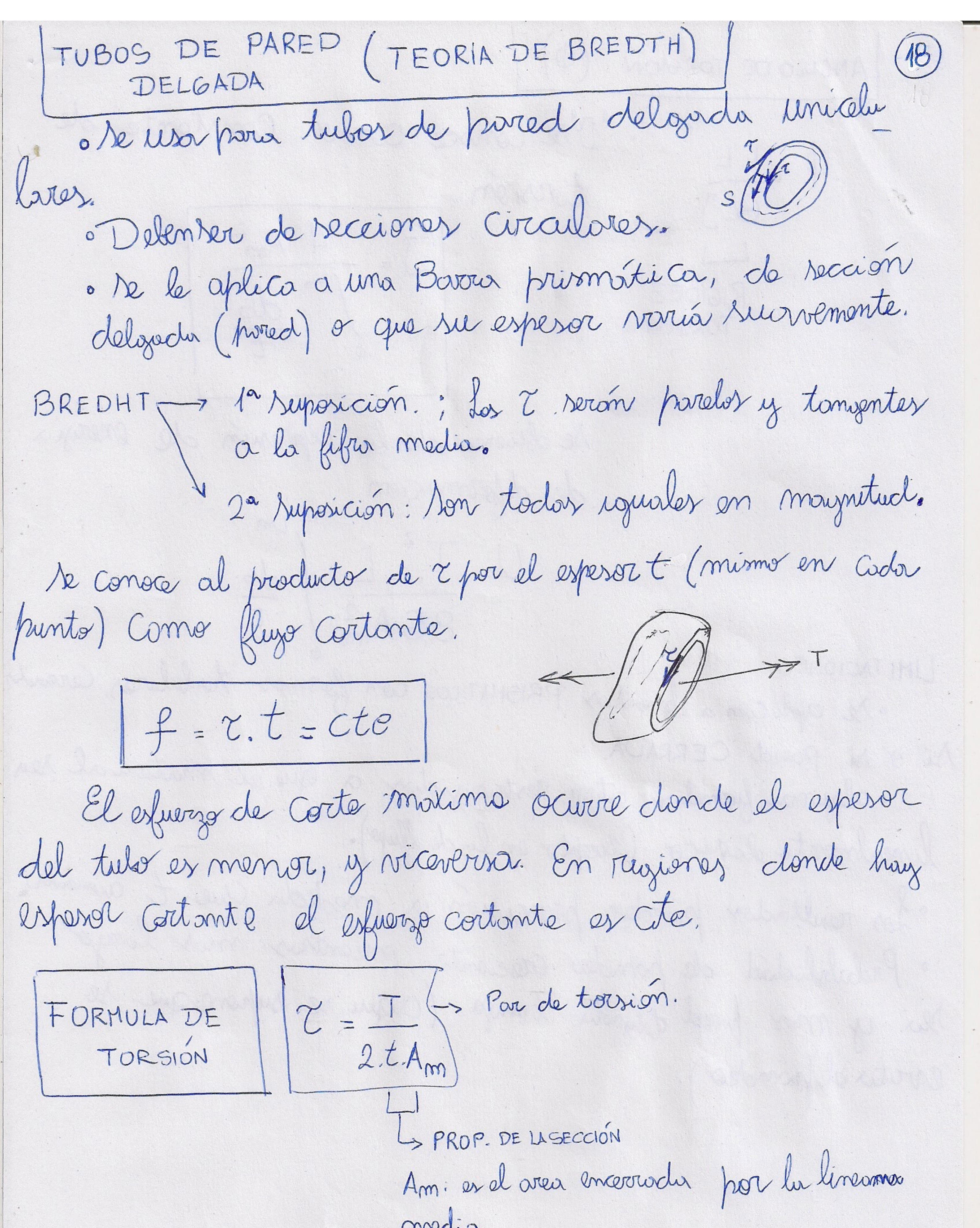
$W = \frac{U \cdot V \cdot \delta}{2}$. $V = \tau \cdot h \cdot t$

$U = \frac{\tau \cdot h^2 \cdot t \cdot \gamma}{2}$

$$u = \frac{U}{Vol} = \frac{1}{2} \tau \cdot \gamma = \frac{1}{2} \frac{\tau^2}{G}$$

$\Downarrow$ $U / h^2 \cdot t$

$$= \frac{\tau \cdot h^2 \cdot t \cdot \gamma}{2 h^2 \cdot t} = \frac{\tau^2}{2G} = \frac{G \gamma^2}{2} = \frac{\tau \cdot \gamma}{2}$$



TUBOS DE PARED DELGADA (TEORÍA DE BREDTH)

- Se usa para tubos de pared delgada unicelulares.
- Delenser de secciones circulares.
- Se le aplica a una Barra prismática, de sección delgada (pared) o que su espesor varía suavemente.

BREDHT → 1ª suposición. ; Los τ serán paralelos y tangentes a la fifra media.

→ 2ª suposición: Son todos iguales en magnitud.

Se conoce al producto de τ por el espesor t (mismo en cada punto) como flujo cortante.

$$f = \tau . t = cte$$

El esfuerzo de Corte máximo ocurre donde el espesor del tubo es menor, y viceversa. En regiones donde hay espesor cortante el esfuerzo cortante es cte.

FORMULA DE TORSIÓN

$$\tau = \frac{T}{2.t.A_m}$$

T → Par de torsión.

$2.t.A_m$ → PROP. DE LA SECCIÓN

A_m: es el area encerrada por la línea media

ANGULO DE TORSIÓN (ϕ)

$$\phi = \frac{T \cdot L}{G \cdot J}$$

RIGIDEZ TORSIONAL ($G \cdot J$)

"J" se conoce como Constante de torsión.

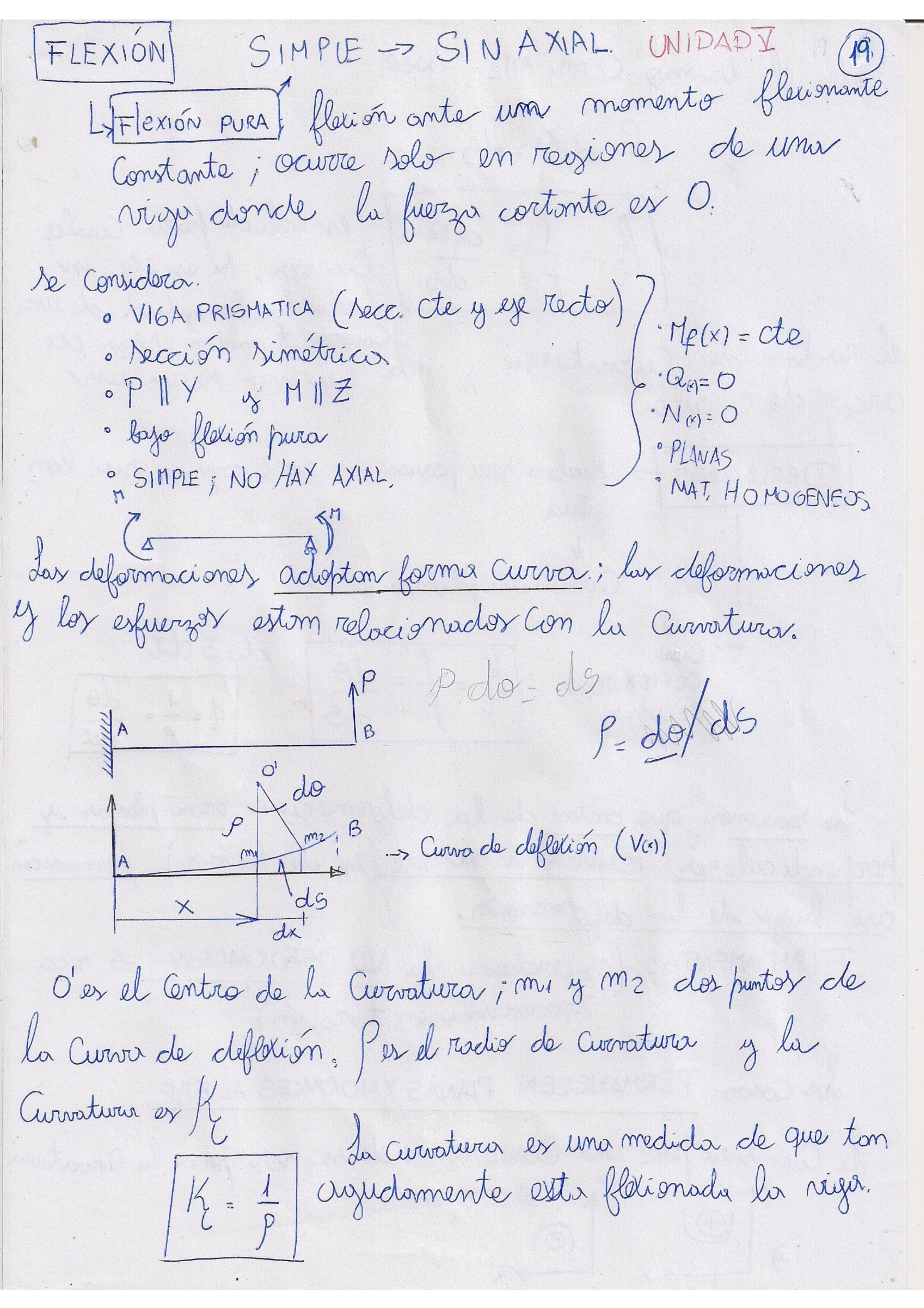
$$J = \frac{4 \cdot A_m^2}{\int_0^{L_m} \frac{ds}{t}}$$

se obtiene de la expresión de energía de deformación

$$U = \frac{T^2 L}{8 G A_m^2} \int_0^{L_m} \frac{ds}{t}$$

LIMITACIONES:

- se aplican a elementos PRISMATICOS con formas tubulares, cerrados si o si pared CERRADA.
- algunas formulas estan restringidas a que el material sea linealmente elastico. (excepto en la de flujo).
- Los resultados pierden prescisión a medida que t aumenta.
- Probabilidad de pandeo creciente mientras mas largo sea y mas pared delgada tenga. (aqui se supone que se evita el pandeo).



FLEXIÓN SIMPLE → SIN AXIAL. UNIDAD V

↳ FLEXIÓN PURA: flexión ante un momento flexionante constante; ocurre solo en regiones de una viga donde la fuerza cortante es 0.

se considera:

- VIGA PRISMATICA (secc. cte y eje recto)
- sección simétrica
- P ∥ Y y M ∥ Z
- bajo flexión pura
- SIMPLE; NO HAY AXIAL.

} $\cdot M_f(x) = cte$
$\cdot Q_{(x)} = 0$
$\cdot N_{(x)} = 0$
· PLANAS
· MAT. HOMOGENEOS

Las deformaciones adoptan forma curva; las deformaciones y los esfuerzos están relacionados con la curvatura.

$\rho \, d\theta = ds$

$\rho = d\theta / ds$

→ Curva de deflexión ($V(x)$)

O' es el centro de la curvatura; m_1 y m_2 dos puntos de la curva de deflexión. ρ es el radio de curvatura y la curvatura es K

$$K = \frac{1}{\rho}$$

La curvatura es una medida de que tan agudamente está flexionada la viga.

de el triang $O'm_1m_2$ saco

$$\rho \, d\theta = ds$$

$$\boxed{K_t = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds}}$$

es valida para cualq. curva, si es cte en toda la longitud de una curva, tambien esta cte el radio de curvatura y la curva sera un arco de circulo.

DEFLEXIONES → suelen ser pequeñas en comp. a su longitud.

↓

curva casi plana

→ CON DEFLEXIONES PEQUEÑAS

$$\boxed{K_t = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds}}$$

$ds \cong dx$

$$\boxed{K_t = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx}}$$

Las secciones que antes de la deformación eran planas y perpendiculares respecto a su eje (eje de la viga) permanecen así luego de la deformación.

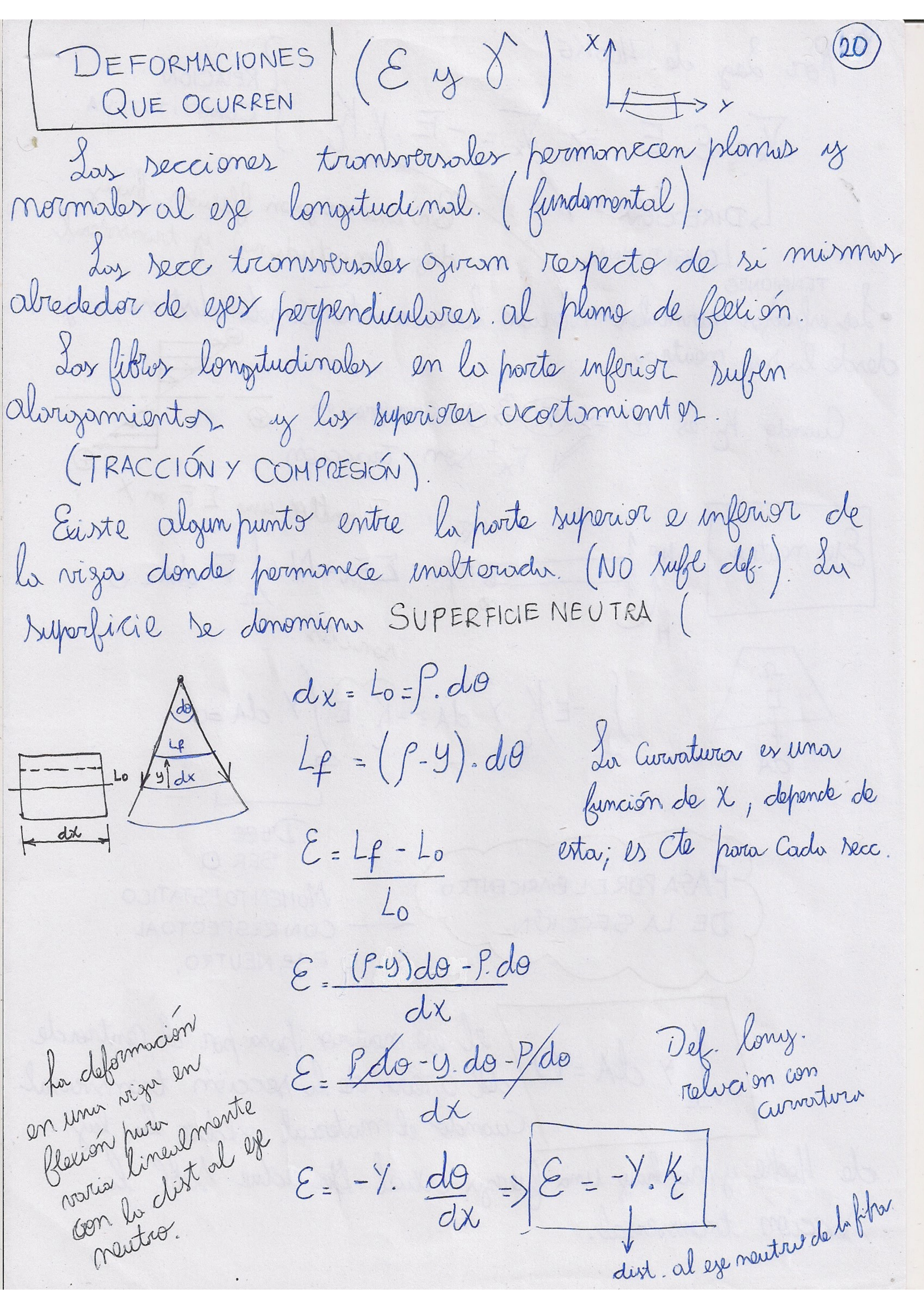
FUNDAMENTAL. (es analogo a la NO DEFORMACION de secc. transversales en torsión).

Las caras PERMANECEN PLANAS Y NORMALES AL EJE

La curvatura posee una CONVENCIÓN de signos para la curvatura

a) y, x: (+)

b) y, x: (−)



DEFORMACIONES QUE OCURREN (ε y γ)

Las secciones transversales permanecen planas y normales al eje longitudinal. (fundamental).

Las secc transversales giran respecto de sí mismas alrededor de ejes perpendiculares al plano de flexión.

Las fibras longitudinales en la parte inferior sufren alargamientos y las superiores acortamientos.

(TRACCIÓN Y COMPRESIÓN).

Existe algún punto entre la parte superior e inferior de la viga donde permanece inalterada. (NO sufre def.) Su superficie se denomina SUPERFICIE NEUTRA (

$$dx = L_0 = \rho . d\theta$$

$$L_f = (\rho - y) . d\theta$$

La Curvatura es una función de x, depende de esta; es Cte para cada secc.

$$\varepsilon = \frac{L_f - L_0}{L_0}$$

$$\varepsilon = \frac{(\rho - y) d\theta - \rho . d\theta}{dx}$$

$$\varepsilon = \frac{\rho d\theta - y . d\theta - \rho d\theta}{dx}$$

Def. long. relación con curvatura

$$\varepsilon = -y . \frac{d\theta}{dx} \Rightarrow \boxed{\varepsilon = -y . k}$$

y: dist. al eje neutro de la fibra

La deformación en una viga en flexión pura varía linealmente con la dist al eje neutro.

Por Ley de HOOKE

$$\sigma_x = \varepsilon . E \Rightarrow \sigma_x = -E . y . K_\zeta$$ } RELACIÓN CONSTITUTIVA.

↳ DIRECCIÓN LONGITUDINAL

En una viga en flexion hay def. longitudinal y transversal

• Los esfuerzos (TENSIONES) normales varian linealmente con la distancia y desde la sup. neutra.

Cuando K_ζ es ⊕ ⇒ σ_x^S son compresion
⇘ σ_x^I son traccion

(diagrama: ⊖ arriba, ⊕ abajo)

Eje neutro

(diagrama: N=0, M)

Planteo una ΣF en X

$$\Sigma F_x = N + \int_\Omega \sigma . dA = 0$$

(diagrama: sección Ω, dA)

son ctes.

$$\int_\Omega -E K_\zeta . Y . dA = -K_\zeta . E \int_\Omega Y . dA = 0$$

DEBE SER 0

MOMENTO ESTATICO CON RESPECTO AL EJE NEUTRO.

PASA POR EL BARICENTRO DE LA SECCIÓN. ←

$$\int_\Omega Y . dA = 0$$

el eje neutro pasa por el centroide del area de la sección transversal cuando el material obedece la ley de Hooke y no hay una fuerza axial que actue sobre la sección transversal.

RELACION MOMENTO - CURVATURA

POR UNA SEGUNDA ECUACIÓN DE ESTATICA (momentos

$$\Sigma M_0 = -M - \int_{\Omega} y \cdot \sigma \cdot dA = 0 \qquad dM = dF \cdot y = y \cdot d\sigma \cdot dA$$

$$M^{\sigma} = \int_{\Omega} y \cdot \sigma \cdot dA$$

$$M = -\int y \cdot (-E_y \cdot K_{\varepsilon}) \cdot dA$$

$$= E \cdot K_{\varepsilon} \int_{\Omega} y^2 \cdot dA = E \cdot K_{\varepsilon} \cdot I$$

$$\boxed{K_{\varepsilon} = \frac{M}{E \cdot I}}$$

Relaciona la def. especifica con el momento. La curvatura es directamente prop. al momento M e inversamente prop. a E.I

Siendo E.I la rigidez de flexión de la viga.

$M_F \to \oplus \to K_{\varepsilon} \to \oplus$

Momentos flexionantes positivos producen curvaturas positivas.

FORMULA DE FLEXION

$$\boxed{\sigma_x = -\frac{M \cdot y}{I} = \varepsilon \cdot E}$$

(y: distancia al eje neutro.)

Esfuerzos direct prop. a M e inversos a I

$$\sigma_x = -E \cdot K_{\varepsilon} \cdot y \qquad K = \frac{M}{E \cdot I}$$

$$\sigma_x = -E \cdot \frac{M}{E \cdot I} \cdot y = -\frac{M \cdot y}{I}$$

los esfuerzos varían linealmente con la distancia y desde el eje neutro.

ESF. MAXIMOS → en los puntos mas alejados del eje neutro.

$$\sigma_1 = -\frac{M \cdot C_1}{I} \qquad S_1 = \frac{I}{C_1} \quad o \quad S_2 = \frac{I}{C_2}$$

$$\sigma_2 = \frac{M \cdot C_2}{I}$$

↳ modulo de sección

DISEÑO DE VIGAS PARA FLEXIÓN

se deben considerar muchos factores.

TIPO DE ESTRUCTURA, MATERIAL, CARGA, AMBIENTE, etc.

pero al final todo se reduce a seleccionar forma y tamaño de la viga. De manera que los esfuerzos reales no excedan los permisibles para el material.

MODULO DE SECCION REQ.

$$S = \frac{M_{MAX}}{\sigma_{PERM}}$$

σ_{PERM} → PROP. DEL MATERIAL Y FACTOR DE SEGURIDAD DESEADO.

es normal seleccionar una viga que tenga la menor area de sección transversal para minimizar peso y ahorrar material. pero debe seguir proporcionando los mismos modulos.

LIMITACIONES

Solo para flexion pura de vigas prismaticas de mat. homogeneo. lin. elastico. Si se somete a flexion no uniforme se producira alabeo de las secciones

FLEXION PLANA COMPUESTA

Cargas de flexión con Cargas axiales (22)
(Columna de un edificio)

Si los elementos no son demasiado esbeltos, los esfuerzos coordinados se obtienen por superposición de esfuerzos de flexión y de los esfuerzos axiales.

N → será cte. en toda la sección

M → esfuerzo linealmente variable

$$M = Q(L - X)$$

$$V = -Q$$

$$N = S$$

$$\sigma_N = \frac{N}{A}$$

$$\sigma_M = \frac{-M \cdot Y}{I}$$

$$\sigma_T = \frac{N}{A} - \frac{M \cdot Y}{I}$$

AXIAL SOLO

Suma de diagramas

Si el esfuerzo de flexión en la parte superior de la viga es numericamente menor que el axial, toda la sección transversal estará en tracción, si son iguales la distribución será triangular, y si el esfuerzo de flexión es numericamente mayor que el esfuerzo axial, la sección transversal estará parcialmente en compresión y parcialmente en tracción.

Cuando M y N actuan el eje neutro se corre. y ya no pasará por el baricentro.

CARGA AXIAL EXCENTRICA

Carga que no actua en el centroide de Area (sección transversal).

La distancia e se la conoce como excentricidad de la carga (distancia entre la carga y el eje X). Aparece un momento P.e.

$$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{P \cdot e \cdot y}{I}$$

$\frac{P}{A}$ → area de la sección

I → I_z

Valida cuando P esta por sobre X.

Y A B P e X

Con $\sigma = 0$ ↓

$$y_0 = -\frac{I}{A \cdot e}$$

y P z e y_0 m m

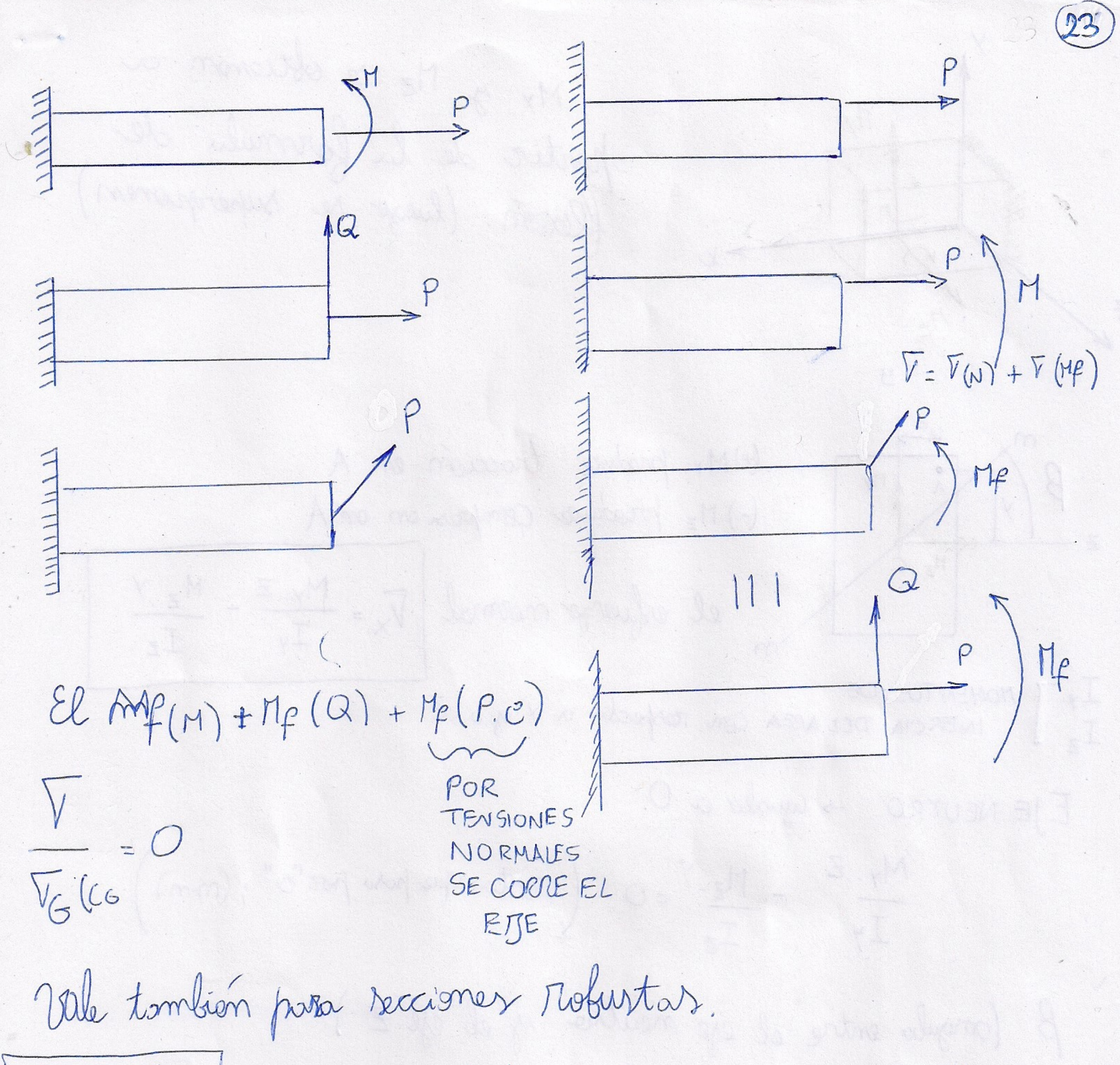
y_0 se mide desde el eje Z

y_0 es positiva en la dirección del eje Y, se identifica como $-y_0$ cuando se muestra hacia abajo en la figura.

el eje neutro se encuentra debajo del eje Z cuando e es positiva y esta arriba del Z cuando e es negativa.

Solo es valido para vigas robustas.

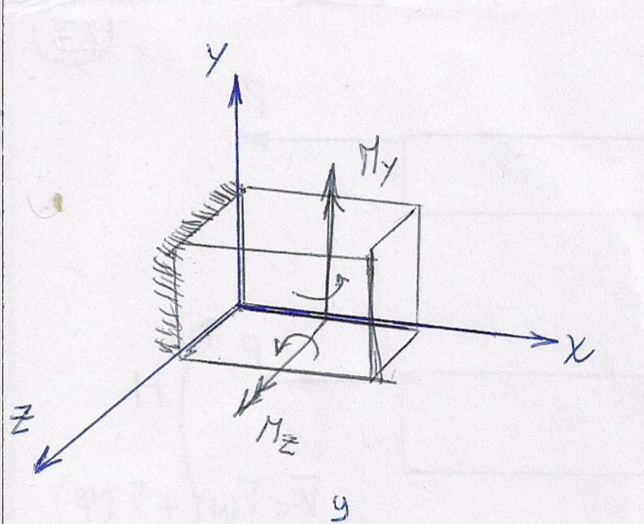
razon entre longitud y altura = 10 o menor es robusta.



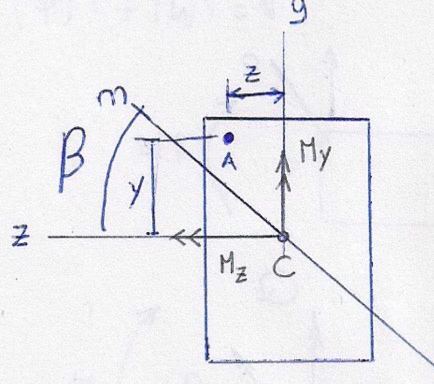
Vale también para secciones robustas.

FLEXIÓN OBLICUA SIMPLE viga sometida a cargas que no actúan en el plano de simetría, cargas inclinadas.

- Las cargas inclinadas deben actuar en el centroide de la sección transversal para evitar el torcimiento a lo largo del eje longitudinal.
- Los vectores de momento son positivos cuando estos apuntan en dirección de los ejes positivos.



M_y y M_z se obtienen a partir de la formula de flexión. (luego se superponen)



(+) M_y produce tracción en A

(-) M_z produce compresion en A

el esfuerzo normal

$$\sigma_x = \frac{M_y \cdot z}{I_y} - \frac{M_z \cdot y}{I_z}$$

I_y, I_z] MOMENTOS DE INERCIA DEL AREA con respecto a y y a z

EJE NEUTRO → igualo a 0.

$$\frac{M_y \cdot z}{I_y} - \frac{M_z \cdot y}{I_z} = 0$$

(recta que pasa por "c"; (m-m))

β (angulo entre el eje neutro y el eje z)

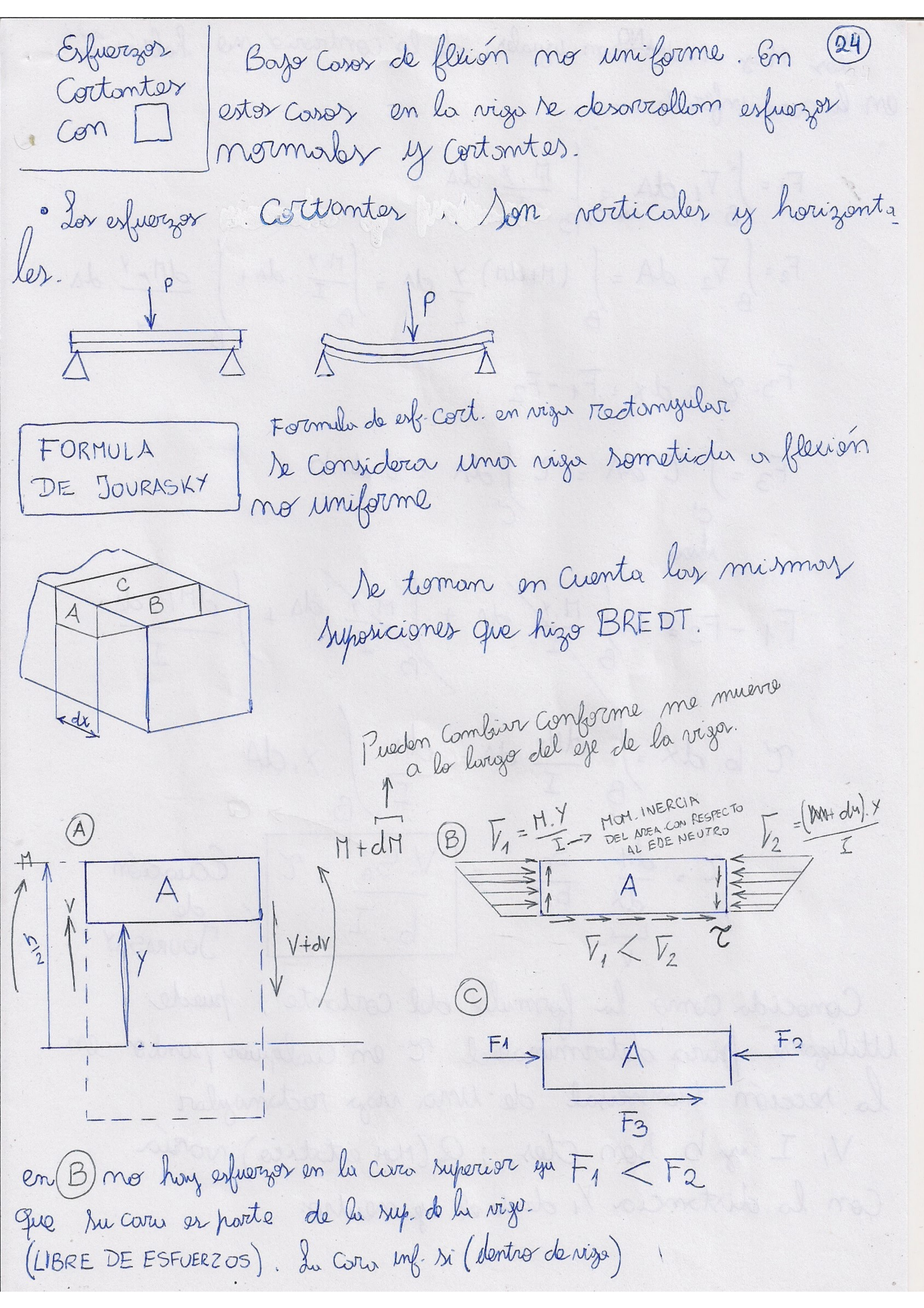
$$\tan\beta = \frac{y}{z} = \frac{M_y \cdot I_z}{M_z \cdot I_y}$$

β esta entre -90 y 90

Es util para encontrar los puntos donde los esfuerzos normales son máximos.

↓

Los máximos ocurren en puntos ubicados del eje neutro. (los esfuerzos varian linealmente.



Esfuerzos Cortantes con □

Bajo casos de flexión no uniforme. En estos casos en la viga se desarrollan esfuerzos normales y cortantes.

• Los esfuerzos cortantes son verticales y horizontales.

FORMULA DE JOURASKY

Formula de esf. cort. en viga rectangular

Se considera una viga sometida a flexión no uniforme

Se toman en cuenta las mismas suposiciones que hizo BREDT.

Pueden cambiar conforme me mueve a lo largo del eje de la viga.

en (B) no hay esfuerzos en la cara superior ya $F_1 < F_2$ que su cara es parte de la sup. de la viga.
(LIBRE DE ESFUERZOS). La cara inf. si (dentro de viga)

Los M y M+dM NO son iguales, de lo contrario no habría τ en la cara inferior.

$$F_1 = \int_B \sigma_1 . dA = \int_B \frac{M.y}{I} . dA$$

$$F_2 = \int_B \sigma_2 . dA = \int_B (M+dM) \frac{y}{I} dA = \int_B \frac{M.y}{I} . dA + \int_B \frac{dM.y}{I_y} . dA$$

$$F_3 = \tau . b . dx = F_1 - F_2$$

$$F_3 = \int_{C'} \tau . dA = \tau . \int_{C'} dA = \tau . dx . b$$

C' → ABAJO

$$F_1 - F_2 = - \int_B \frac{M.y}{I} . dA + \int_B \frac{M.y}{I} dA + \int \frac{dM y . dA}{I}$$

$$\tau . b . dx = \int_B \frac{dM y}{I} dA = \frac{dM}{I} \int_B y . dA \rightarrow Q$$

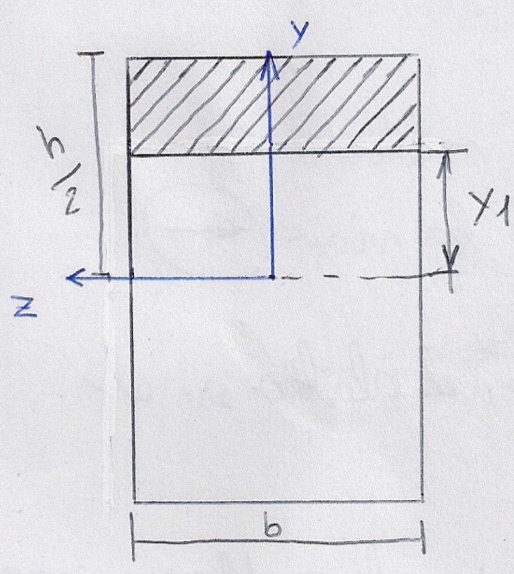
$$\tau = \underbrace{\frac{dM}{dx}}_{V} \frac{S_B}{b.I} = \boxed{\frac{V . S_B}{b . I} = \tau}$$ Ecuación de JOURASKY

Conocido como la formula del cortante, puede utilizarse para determinar el τ en cualquier punto en la sección transversal de una viga rectangular.

V, I y b son ctes. ; Q (MOM. estatico) varía con la distancia Y_1 desde el eje neutro.

DISTRIBUCIÓN DE ESF. CORT. EN VIGA RECTANGULAR

Obtengamos Q de la parte sombreada. Como se distribuye τ:



$$I = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

$$Q = b\left(\frac{h}{2} - y\right) \cdot \frac{1}{2}\left(y + \frac{h}{2}\right)$$

q.L

q.L/2

X

L

Con $X = \frac{3}{4} L$

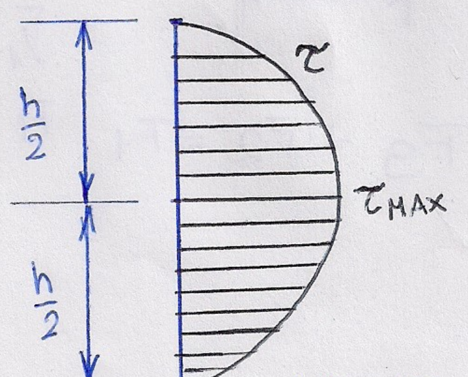
$$V_{\left(\frac{3}{4}L\right)} = \frac{q \cdot L}{4}$$

$$\tau = \frac{\frac{q \cdot L}{4} \cdot b\left(\frac{h}{2} - y\right) \cdot \frac{1}{2}\left(y + \frac{h}{2}\right)}{b \cdot \frac{b \cdot h^3}{12}}$$

$$\boxed{\tau = \frac{V}{2I}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)}$$

Los esfuerzos cortantes en una viga rectangular varían cuadráticamente con la distancia Y desde el eje neutro.

$\tau = 0 \Rightarrow y = \pm h/2$

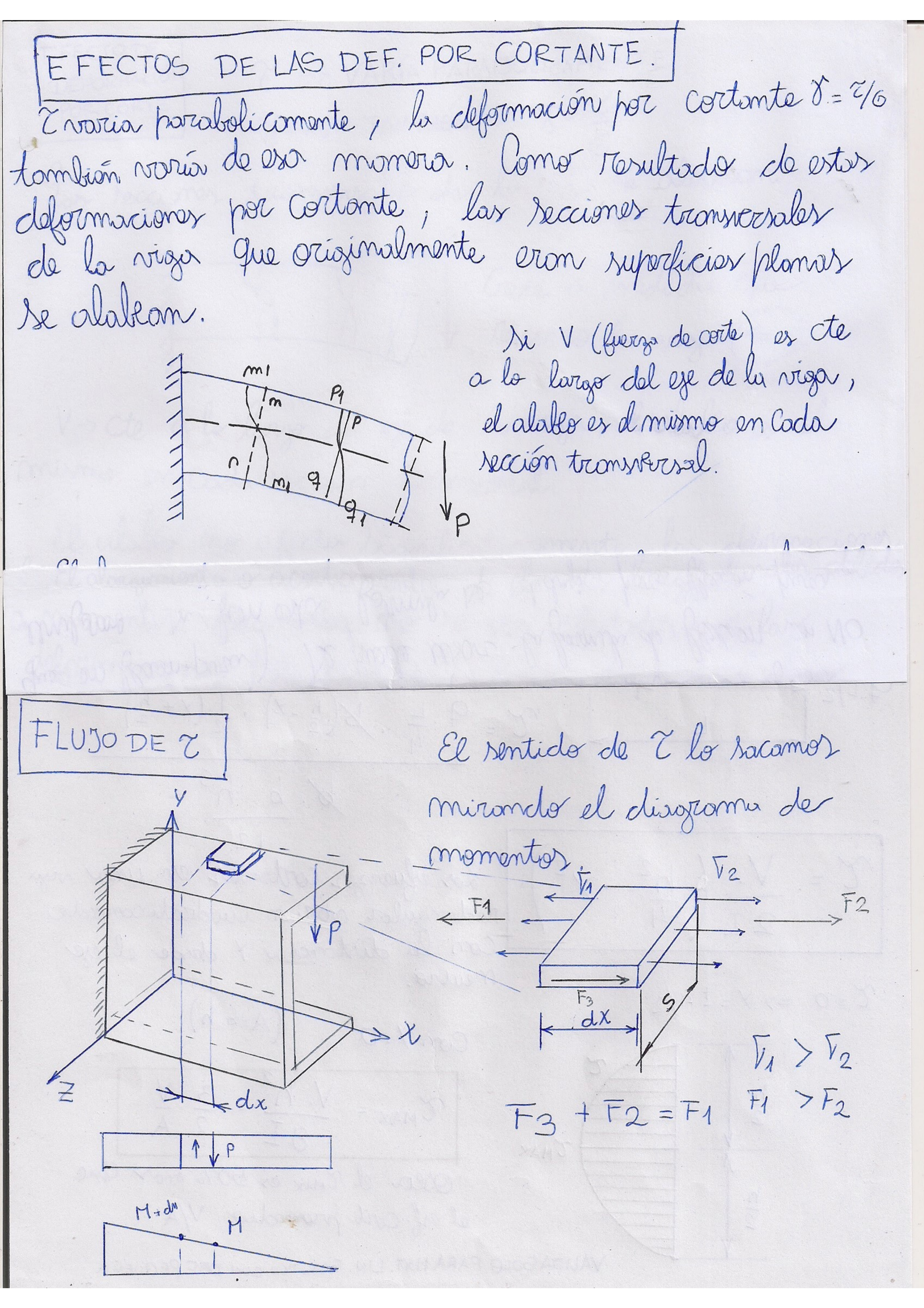


Con $Y = 0$ $\quad (A = b \cdot h)$

$$\boxed{\tau_{MAX} = \frac{V \cdot h^2}{8I} = \frac{3}{2} \cdot \frac{V}{A}}$$

Osea el τ_{MAX} es 50% mas que el esf. cort. promedio V/A

VALIDA SOLO PARA MAT. LIN. ELASTICO CON DEF PEQUEÑA.



EFECTOS DE LAS DEF. POR CORTANTE.

τ varía parabolicamente, la deformación por cortante $\gamma = \tau/G$ también varía de esa manera. Como resultado de estas deformaciones por cortante, las secciones transversales de la viga que originalmente eran superficies planas se alabean.

Si V (fuerza de corte) es cte a lo largo del eje de la viga, el alabeo es el mismo en cada sección transversal.

FLUJO DE τ

El sentido de τ lo sacamos mirando el diagrama de momentos

$\tau_1 > \tau_2$

$F_1 > F_2$

$F_3 + F_2 = F_1$

$$F_1 = \int_{\Omega} \sigma_1 \cdot dA \qquad F_2 = \int_{\Omega} \sigma_2 \cdot dA$$

$$\sigma_1 = \frac{(M + dM) \cdot y}{I} \qquad \sigma_2 = \frac{M y}{I}$$

$$F_3 = F_1 - F_2$$

$$= \int_{\Omega} \frac{dM y \cdot dA}{I} = \frac{dM \cdot Q_{\Omega}}{I}$$

$$F_3 = dM \cdot Q_{\Omega}$$

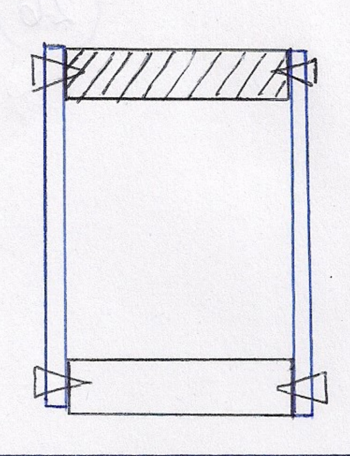
$$\frac{F_3}{dx} = \frac{dM}{dx} \cdot \frac{Q_{\Omega}}{I} = \boxed{\frac{V \cdot Q_{\Omega}}{I} = f}$$

Si $F_1 = F_2 \Rightarrow F_3 = 0 \longrightarrow$ NO HAY FLUJO.

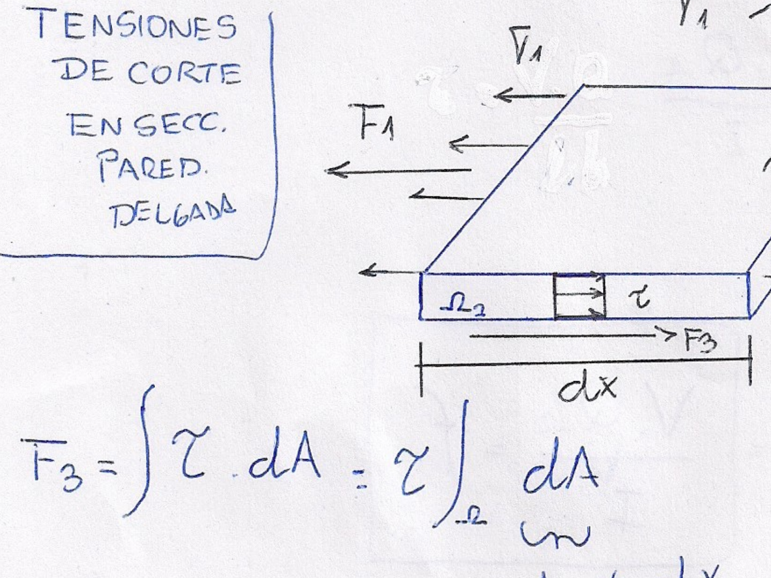
El flujo cortante f es la fuerza horizontal por unidad de longitud a lo largo del eje longitudinal de la viga.

VIGAS ARMADAS Son vigas unidas por partes, ya sea con clavos, remaches o soldadas.

Se realizan para cumplir con necesidades especiales arquitectónicas o estructurales y para proporcionar secciones transversales mayores que las que se dispone comunmente.



$$f = \frac{F_3}{L} = \boxed{\frac{V \cdot Q_{\Omega}}{I}}$$



$$F_3 = \int \tau \cdot dA = \tau \int_{\Omega} dA$$

$A = t \cdot dx$

siendo t el espesor.

$$F_3 = \tau \cdot t \cdot dx \Rightarrow \tau = \frac{F_3}{t \cdot dx}$$

$$\frac{F_3}{t \cdot dx} = \frac{dM}{t \cdot dx} \cdot \frac{Q_{\Omega}}{I}$$

$$\boxed{\tau = \frac{V \cdot Q_{\Omega}}{t \cdot I}}$$

En el extremo libre los τ son 0.

CENTRO DE CORTE

Las cargas laterales actuan en un plano que no es de simetría.

Para que la viga flexione SIN TORSIÓN se deben aplicar las cargas en un punto particular de la sección transversal denominado Centro de Corte.

Por ejemplo:

VIGA DE PERFIL I
desequilibrado

Y
Z
S
M_o
C
P

P

El punto S es el C.C.; se aplica la fuerza P de modo tal que flexione sin TORSIÓN.

si la Carga se aplica en algun otro punto sobl el eje Z,

S
T
P
P

La fuerza que actua en S flexiona con respecto a Z y el par de Torsion produce TORSIÓN.

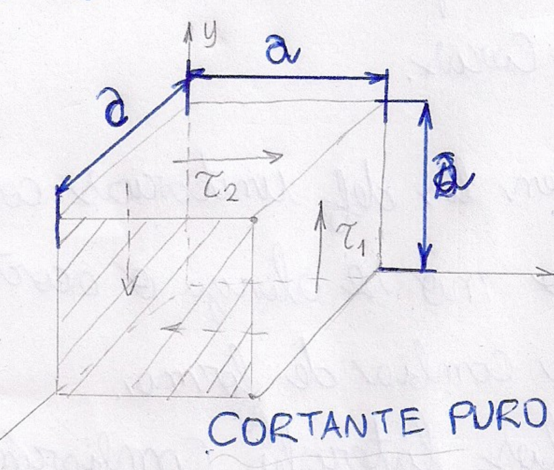
el CC se ubica sobl cualquier eje de simetría.

RESUMEN COLOQUIO
MEC. DE LAS ESTRUCTURAS

UNIDAD 1 — FUNDAMENTOS DE LA RESIST. DE MATERIALES.

- Igualdad de los esfuerzos cortantes en planos perpendiculares.

Se considera un elemento de material sometido a esfuerzos cortantes.



CORTANTE PURO

$$\Sigma F_x = \tau_{yx} \cdot A - \tau_{yx} \cdot A = 0$$

$$\Sigma F_y = \tau_{xy} \cdot A - \tau_{xy} \cdot A = 0$$

$$\Sigma M_o = \tau_{xy} \cdot A \cdot \frac{a}{2} - \tau_{xy} \cdot A \cdot \frac{a}{2} + \tau_{yx} \cdot A \cdot \frac{a}{2} - \tau_{yx} \cdot A \cdot \frac{a}{2} = 0$$

$$\tau_{xy} \cdot A \cdot a - \tau_{xy} \cdot A \cdot a + \tau_{yx} \cdot A \cdot a - \tau_{yx} \cdot A \cdot a = 0$$

y_1, y, $\tau_2 = \tau_{yx}$, a, τ_{xy}, x, $\tau_1 = \tau_{xy}$, x_1, τ_{yx}

Hago sumatoria de momentos, en ① y se demuestra que un

$$\tau_{ij} = \tau_{ji}$$

$$\Sigma M_1 = -\tau_{yx} \cdot A \cdot a + \tau_{xy} \cdot A \cdot a = 0$$

$$\tau_{xy} \cdot A \cdot a = \tau_{yx} \cdot A \cdot a$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

Las tensiones normales producirán alargamientos.

Las tensiones de corte, cambio de forma o distorsiones.

Las magnitudes de los cuatro esfuerzos cortantes que actuan sobre el elemento son iguales.

① Los esfuerzos cortantes sobre caras opuestas y paralelas de un elemento son iguales en magnitud y opuestos en dirección.

② Los esf. cortantes sobre caras adyasentes (y perp) de un elemento son de igual magnitud y tienen direcciones tales, que ambos esfuerzos apuntan alejandose de la línea de intersección de las caras.

τ q τ p $\frac{\gamma}{2}$ s $\frac{\gamma}{2}$ r $\gamma+\frac{\pi}{2}$ $\frac{\pi}{2}-\gamma$

aparecen las def. unitarias cortantes el elemento no se alarga o acorta, mas bien cambia de forma.
Los angulos laterales cambiaron.

γ es una medida de la distorción o cambio de forma del elemento, deformación unitaria cortante, medido en grados o radianes puesto que es un angulo.

ELEMENTOS CARGADOS AXIALMENTE

Una barra prismática de longitud L, si es sometida a una carga P de T o C, se alargará o comprimirá un δ.

Si "P" actua en el centroide de la sección transversal, el esfuerzo normal uniforme en las secciones transversales responde a la formula de $\sigma = \frac{P}{A}$. Ademas si es homogeneo el material su def. axial $\varepsilon = \delta / L$

Para que todos los σ sean de igual magnitud en la sección se debe plantear

Z, Ω, y_n, N, Z_n, Z_N, y_n, y

$$\sigma = cte. \ \forall (y, z) \in \Omega$$

$$dM = \underbrace{z}_{d} . \underbrace{\sigma . dA}_{\vec{F}}$$

$$\sum M_y = N . Z_n + \int_\Omega Z \sigma . dA = 0$$

$$|N . Z_n| \pm \left|\int_\Omega z . \sigma . dA\right| = 0 \qquad N = \int_\Omega \sigma . dA$$

$$N . Z_n = \sigma \int_\Omega z . dA$$

$$\int_\Omega \sigma . dA . Z_n = \sigma \int_\Omega z \, dA$$

$$\cancel{\sigma} \int_\Omega dA . Z_n = \cancel{\sigma} \int_\Omega z \, dA$$

debe ser cte. al pasar por el baricentro

$$A . Z_n = \int_\Omega z . dA$$

$$A . Z_n = S_y$$

$$\boxed{Z_n = \frac{S_y}{A}} = Z_{CG}$$

Es la coordenada Z del baricentro de la sección.

$$dM' = Y \cdot \sigma \cdot dA$$

$$\sum M_z = N \cdot Y_n + \int_\Omega Y \cdot \sigma \cdot dA = 0$$

$$N \cdot Y_n = -\int_\Omega Y \cdot \sigma \cdot dA$$ tomo valor abs.

$$\int_\Omega \sigma \cdot dA = N \qquad N \cdot Y_n = \int_\Omega Y \cdot \sigma \cdot dA$$

$$\int_\Omega \sigma \cdot dA \cdot Y_n = \int_\Omega Y \cdot \sigma \cdot dA$$

$$\sigma \int dA \, Y_n = \sigma \int Y \, dA$$

$$\boxed{Y_n = \frac{S_z}{A}} = Y_{CG}$$ Coordenada Y del baricentro de la sección.

Si N o P pasan por el baricentro de la sección entonces $\boxed{\sigma = \frac{N}{A}}$

FORMULA DE AXIAL (δ)

Suponiendo que el material sigue la Ley de Hooke.

donde $\sigma = E \cdot \varepsilon$.

Ademas si es homogeneo $\varepsilon = \frac{\delta}{L}$ su def. axial

① $\sigma = E \cdot \varepsilon$

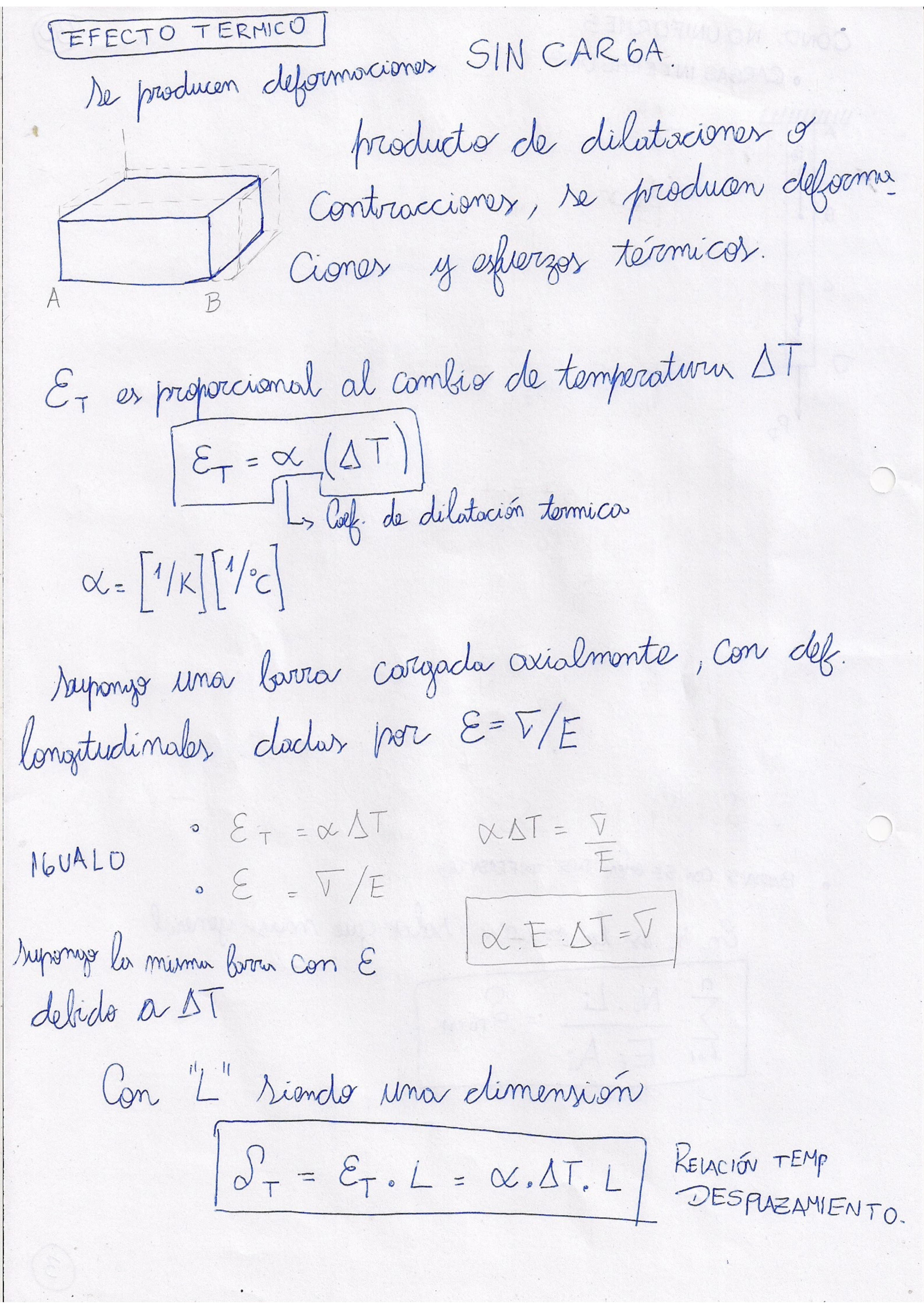
② $\sigma = E \cdot \frac{\delta}{L}$

③ $\frac{P}{A} = E \cdot \frac{\delta}{L}$

④ $\boxed{\frac{P \cdot L}{E A} = \delta}$

$\frac{L}{E \cdot A} = f$ (FLEX)

$\frac{E A}{L} = K$ (RIG)



EFECTO TERMICO

Se producen deformaciones SIN CARGA.

producto de dilataciones o Contracciones, se producen deformaciones y esfuerzos térmicos.

ε_T es proporcional al cambio de temperatura ΔT

$$\varepsilon_T = \alpha (\Delta T)$$

↳ Coef. de dilatación termica

$\alpha = [1/K][1/°C]$

Supongo una barra cargada axialmente, con def. longitudinales dadas por $\varepsilon = \sigma / E$

IGUALO

- $\varepsilon_T = \alpha \Delta T$
- $\varepsilon = \sigma / E$

$\alpha \Delta T = \frac{\sigma}{E}$

$$\alpha \cdot E \cdot \Delta T = \sigma$$

Supongo la misma barra con ε debido a ΔT

Con "L" siendo una dimensión

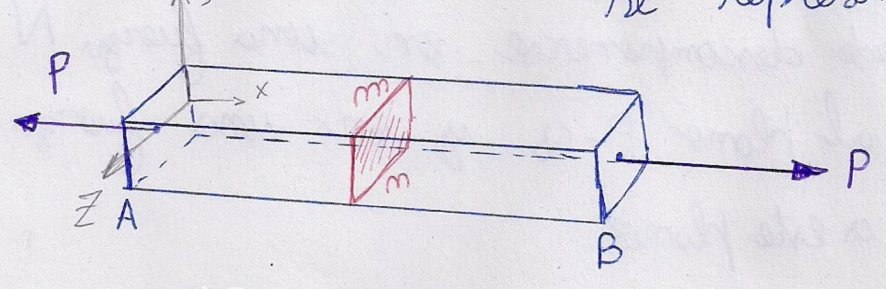
$$\delta_T = \varepsilon_T \cdot L = \alpha \cdot \Delta T \cdot L$$

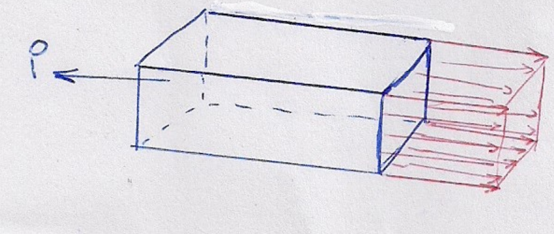
RELACIÓN TEMP DESPLAZAMIENTO.

ESF. SOBRE. SECCIONES INCLINADAS.

- BARRA PRISMATICA
- MAT. HOMOGENEO
- P en el CG de Secc.
- HOOKE

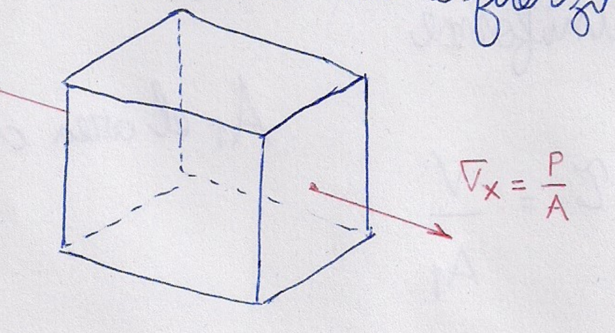
se tiene una barra prismatica sometida a una P
se representa ASI





$\sigma_x = \frac{P}{A}$ se puede dibujar plano pero se debe tener en cuenta su espesor.

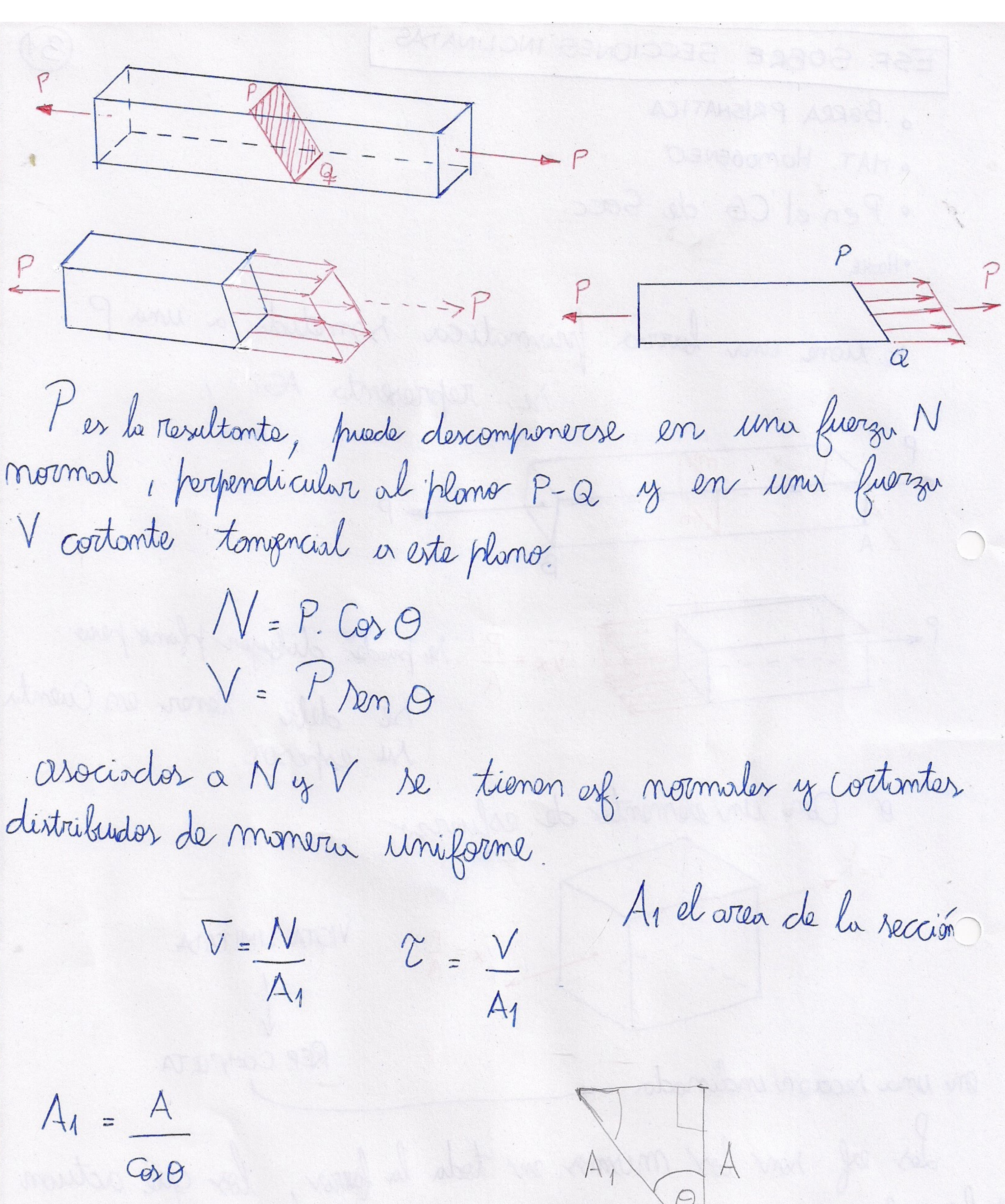
o Con un elemento de esfuerzo



VISTA LIMITADA
↓
REP. COMPLETA

en una seccion inclinada ←

Los esf. son los mismos en toda la barra, los que actuan sobre la seccion inclinada deben estar distribuidos de manera uniforme.



P es la resultante, puede descomponerse en una fuerza N normal, perpendicular al plano P-Q y en una fuerza V cortante tangencial a este plano.

$$N = P . \cos\theta$$
$$V = P \operatorname{sen}\theta$$

asociados a N y V se tienen esf. normales y cortantes distribuidos de manera uniforme.

$$\sigma = \frac{N}{A_1} \qquad \tau = \frac{V}{A_1}$$

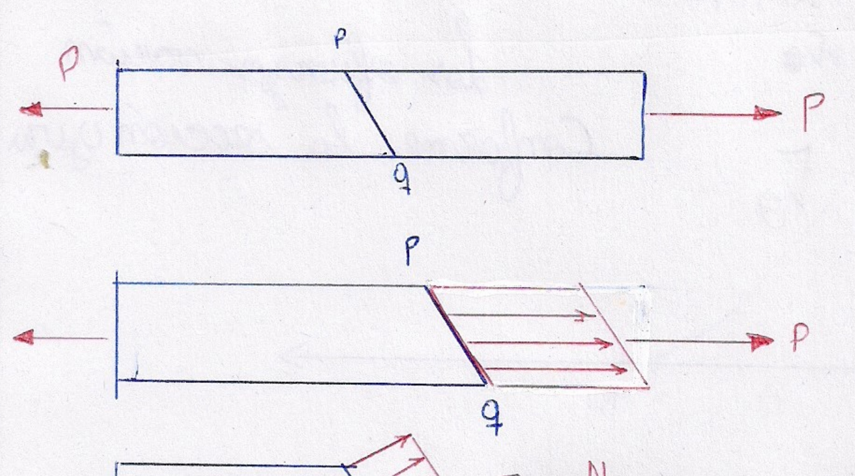
A_1 el area de la sección

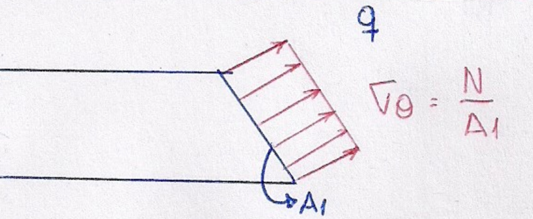
$$A_1 = \frac{A}{\cos\theta}$$

A_1 A θ

$$\cos\theta = \frac{A}{A_1}$$

$$\boxed{A_1 = \frac{A}{\cos\theta}}$$





N

θ

P

V

$\tau_\theta = -\frac{V}{A_1}$

A_1

La convencion de signos usada es (+)

y

σ_θ

τ_θ

P

x

θ

$$\sigma_\theta = \frac{N}{A_1} = \frac{P}{A} \cos\theta \cdot \cos\theta$$

$$\sigma_\theta = \frac{P}{A} \cdot \cos^2\theta \Rightarrow \boxed{\sigma_\theta = \sigma_x \cdot \cos^2\theta}$$

Simplemente se plantea y reemplaza

$$\tau_\theta = -\frac{V}{A_1} = -\frac{P}{A} \operatorname{sen}\theta \cdot \cos\theta \Rightarrow \boxed{\tau_\theta = -\sigma_x \cdot \operatorname{sen}\theta \cdot \cos\theta}$$

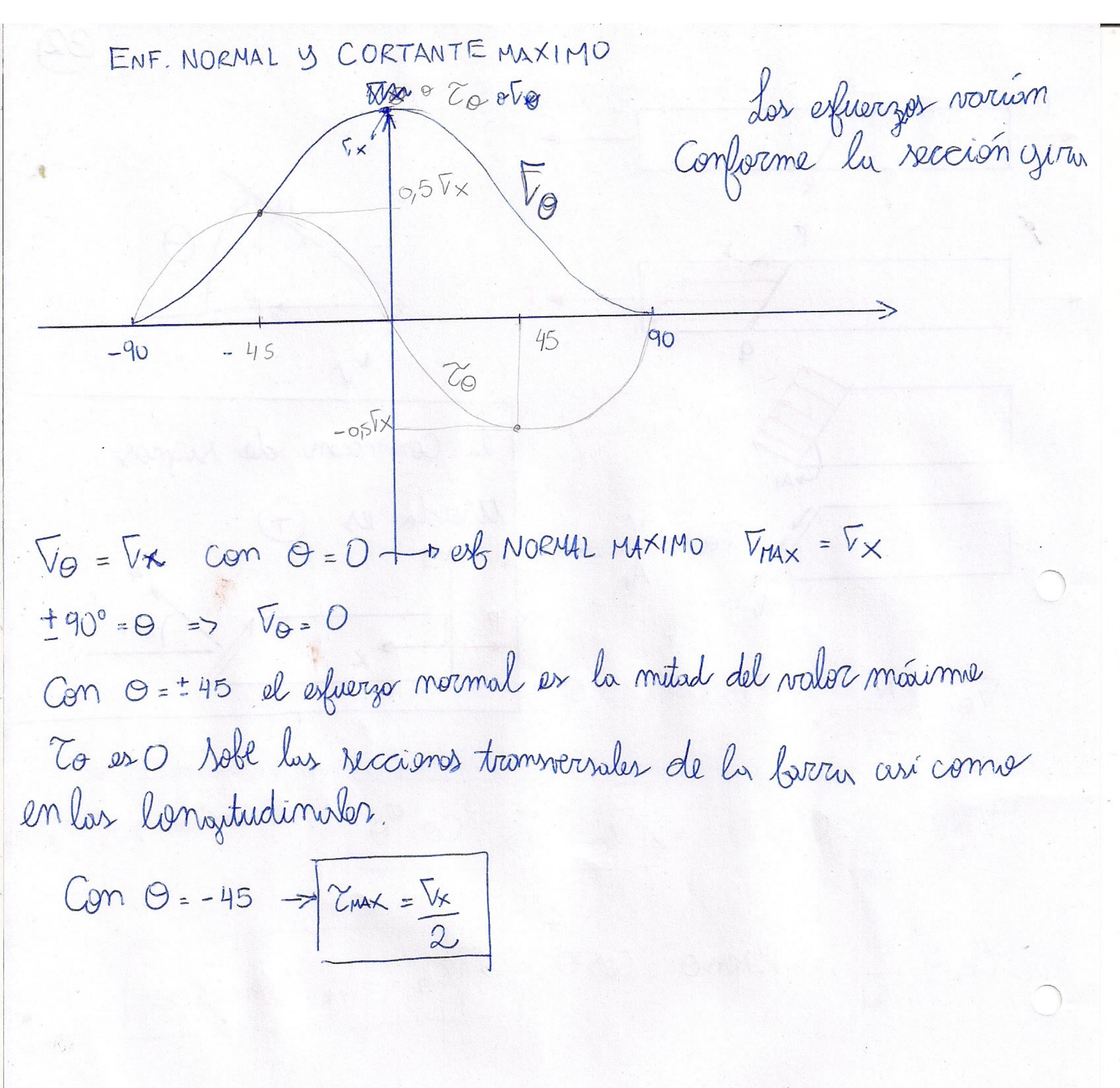
$$\cos^2\theta = \frac{1}{2} + \frac{\cos 2\theta}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$$

$$\boxed{\sigma_\theta = \frac{\sigma_x}{2}(1 + \cos 2\theta)}$$

$$\operatorname{sen}\theta \cdot \cos\theta = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\theta$$

$$\boxed{\tau_\theta = -\frac{\sigma_x}{2} \cdot \operatorname{sen} 2\theta}$$

ENF. NORMAL Y CORTANTE MAXIMO



Los esfuerzos varían
Conforme la sección gira

$\sigma_\theta = \sigma_x$ con $\theta = 0$ → esf NORMAL MAXIMO $\sigma_{MAX} = \sigma_x$

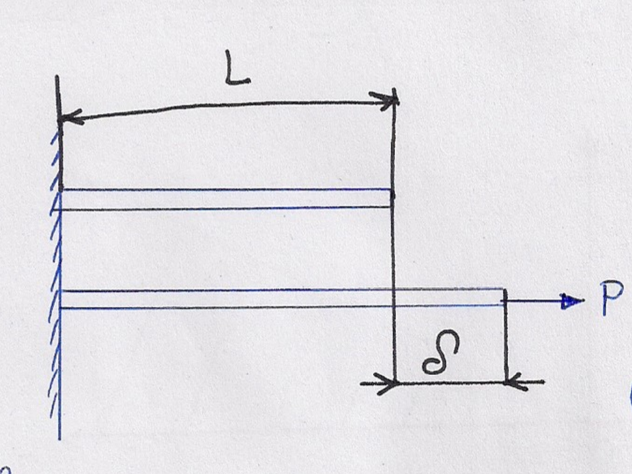
$\pm 90° = \theta$ => $\sigma_\theta = 0$

Con $\theta = \pm 45$ el esfuerzo normal es la mitad del valor máximo

τ_θ es 0 sobre las secciones transversales de la barra así como en las longitudinales.

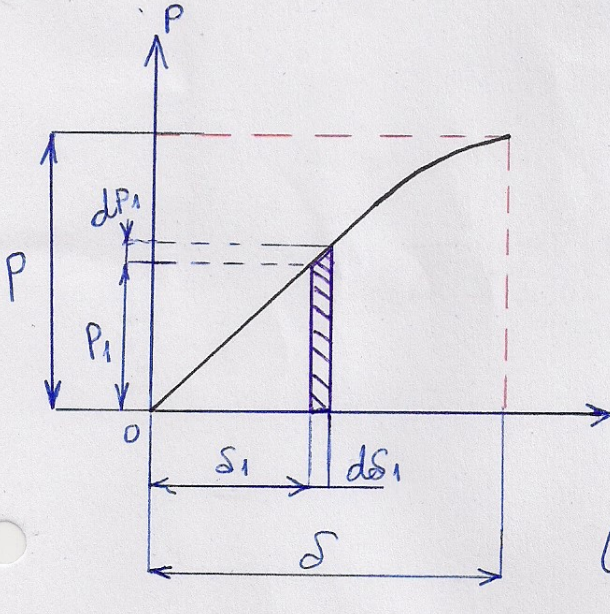
Con $\theta = -45$ → $\tau_{MAX} = \dfrac{\sigma_x}{2}$

ENERGIA Y DENSIDAD DE ENERGÍA



se considera una barra prismatica de longitud L sometida a una P de tracción. La Carga se aplica lentamente (PROCESO DE CARGA ESTATICO), no hay efectos dinamicos o inerciales. debido a movimientos

P => trabajo!



Con el diagrama Carga desp. para calcular su trabajo.

$$W = \int_0^\delta P_1 \cdot d\delta_1$$

W es el area debajo de la Curva P-δ

U es la energía de deformación.

$$U = W = \int_0^\delta P_1 \, d\delta_1$$

pongo P en función de δ

$$\delta = \frac{P.L}{E.A}$$

$$P = \frac{\delta . E . A}{L}$$

$$U = \int_0^{\delta_{MAX}} \frac{\delta . E . A}{L} \, d\delta$$

$$U = \frac{E.A}{L} \int_0^\delta \delta . d\delta = \frac{E.A}{L} . \frac{\delta^2}{2} \Big|_0^{\delta_{MAX}}$$

$$\boxed{U = \frac{E.A\,\delta_{MAX}^2}{2L}}$$

$$U = \frac{A \cdot E}{L} \cdot \frac{\delta_{MAX}^2}{2} = \frac{A \cdot E}{L} \cdot \frac{\delta_{MAX}}{2} \cdot P_{MAX} \frac{A \cdot E}{L}$$

$$\boxed{U = \frac{1}{2} P_{MAX} \cdot \delta_{MAX}}$$

P_{MAX}, 0, δ_{MAX}

area del triangulo $= U$

- NO VALE la superposición!

P_1 P_2 P_1 P_2

$$U = \frac{A \cdot E}{2L} \cdot \frac{P_{MAX}^2 \cdot L^2}{E^2 \cdot A^2} = \frac{P_{MAX}^2 \cdot L}{2EA}$$

$$U_1 = P_1^2 \cdot \frac{L}{2E \cdot A}$$

$$U_3 = (P_1 + P_2)^2 \frac{L}{2E \cdot A}$$

$$U_2 = P_2^2 \cdot \frac{L}{2EA}$$

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L}$$

$$U_1 + U_2 = U_3 \ ?$$

$$\frac{P_1^2 \cdot L}{2EA} + \frac{P_2^2 \ L}{2EA} = \frac{L}{2EA}\left(P_1^2 + P_2^2\right) \neq U_3$$

el cuadrado NO distribuye con la suma!

DENSIDAD DE ENERGIA

Cantidad de energía de deformación por unidad de volumen de material

$$u = \frac{U}{A.L} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \delta \cdot P}{A \cdot L} = \frac{1}{2} \cdot \delta \cdot P \cdot \frac{1}{A.L} =$$

$[J/m^3]$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\delta}{L} \cdot \frac{P}{A} = \boxed{\frac{1}{2} \cdot \sigma \cdot \varepsilon}$$

TORSIÓN

- Barra prismática de sección circular, con T en sus extremos (en torsión pura)
- Secciones transversales planas y circulares, los radios rectos. Ángulo pequeño, no varía L ni los radios.
- L y forma son ctes., secc. transv. planas.

T, x, dx, L, T

T, a, γ, $d\phi$, b, c, T, dx

γ_{MAX} es la magnitud de deformación por cortante en la superficie exterior de la barra. γ_{MAX} es el decremento en este ángulo

$$\gamma_{MAX} = \frac{b.c}{ab} \ [rad]$$

r es el radio de la barra

$$bc = r.\,d\phi$$
$$ab = dx$$

$$\gamma_{MAX} = \frac{r.\,d\phi}{dx}$$ def unitaria por cortante con el ángulo de torsión.

$$\theta = \frac{d\phi}{dx} \longrightarrow \text{Razón de torsión}$$

$$\gamma_{MAX} = r.\,\theta$$

TORSION PURA

$$\theta = \frac{\phi}{L} \qquad \gamma_{MAX} = \frac{r \cdot \phi}{L}$$

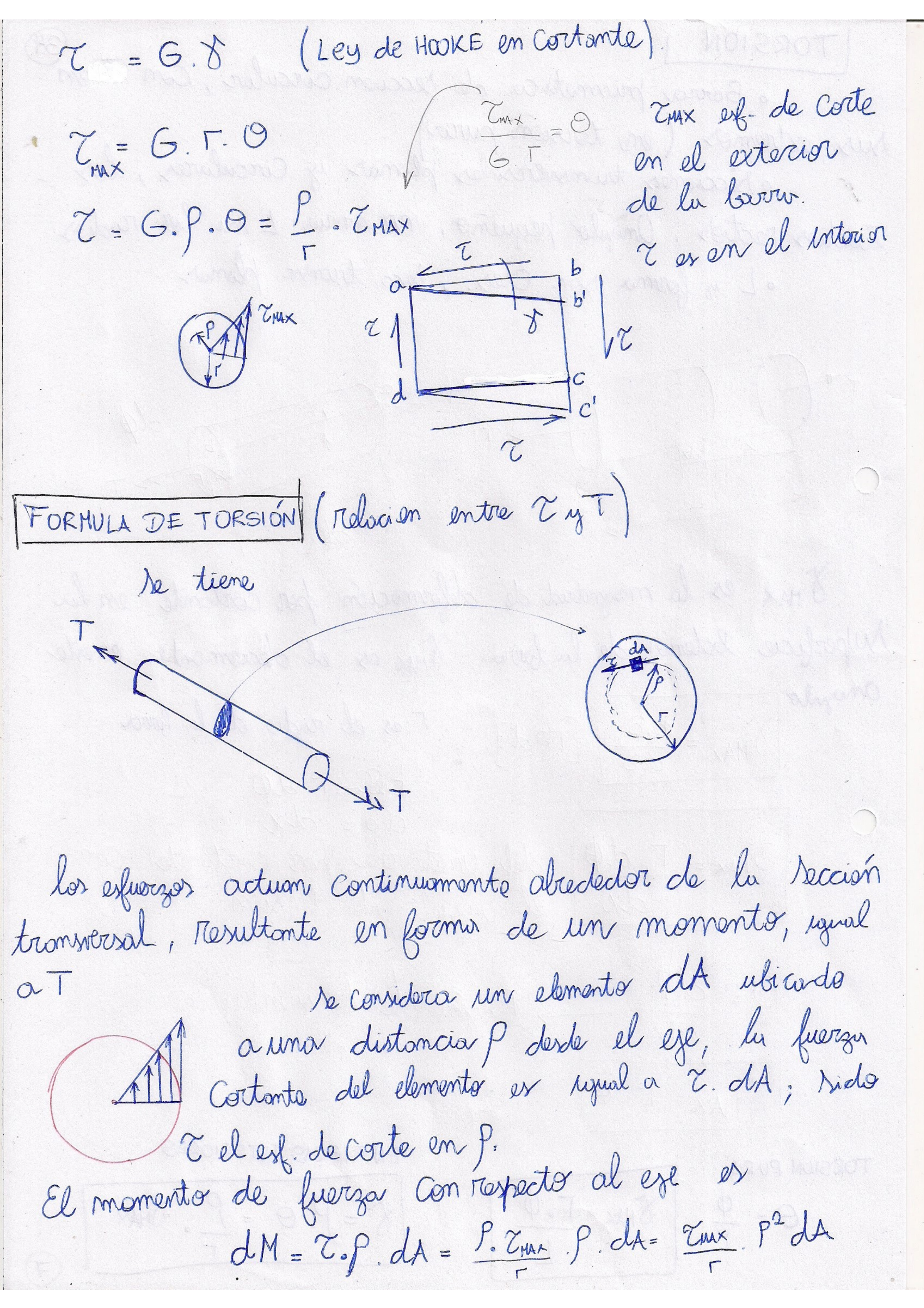
EN FIBRAS INTERIORES

$$\gamma = \rho.\,\theta = \frac{\rho}{r}.\,\gamma_{MAX}$$

$\tau = G \cdot \gamma$ (Ley de HOOKE en Cortante)

$\tau_{MAX} = G \cdot r \cdot \theta$ $\qquad \frac{\tau_{MAX}}{G \cdot r} = \theta$ $\qquad \tau_{MAX}$ ef. de Corte en el exterior de la barra.

$\tau = G \cdot \rho \cdot \theta = \frac{\rho}{r} \cdot \tau_{MAX}$ $\qquad \tau$ es en el interior



FORMULA DE TORSIÓN (relación entre τ y T)

Se tiene

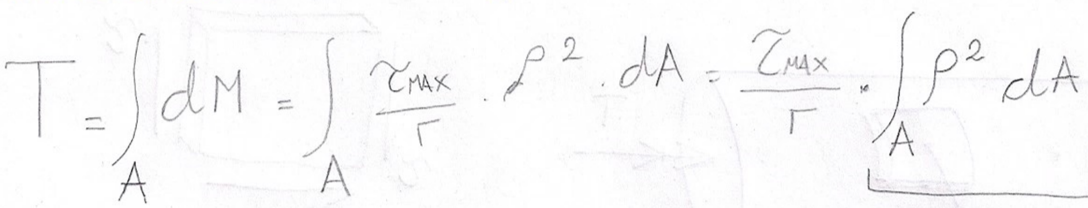
los esfuerzos actuan continuamente alrededor de la sección transversal, resultante en forma de un momento, igual a T

se considera un elemento dA ubicado a una distancia ρ desde el eje, la fuerza Cortante del elemento es igual a $\tau \cdot dA$; siendo τ el esf. de corte en ρ.

El momento de fuerza con respecto al eje es

$$dM = \tau \cdot \rho \cdot dA = \frac{\rho \cdot \tau_{MAX}}{r} \cdot \rho \cdot dA = \frac{\tau_{MAX}}{r} \cdot \rho^2 dA$$

M resultante debe ser igual a T



$$T = \int_A dM = \int_A \frac{\tau_{MAX}}{r} \cdot \rho^2 \cdot dA = \frac{\tau_{MAX}}{r} \cdot \underbrace{\int_A \rho^2 \, dA}_{\boxed{I_p}}$$

$$T = \frac{\tau_{MAX}}{r} \cdot I_p \qquad \boxed{I_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32}} \text{ Con secc. circular}$$

$$\boxed{\tau_{MAX} = \frac{T \cdot r}{I_p}}$$

ÁNGULO DE TORSIÓN

$$\tau_{MAX} = G \cdot r \cdot \theta = \frac{T \cdot r}{I_p}$$

Como $\theta = \frac{d\phi}{dx}$

$$\int d\phi = \int \theta \, dx$$

$$\phi = \theta \cdot l$$

$$\theta = \frac{T}{G \cdot I_p}$$

MULTIPLICO POR "l"

$$\underbrace{\theta \cdot l}_{\phi} = \frac{T \cdot l}{G \cdot I_p}$$

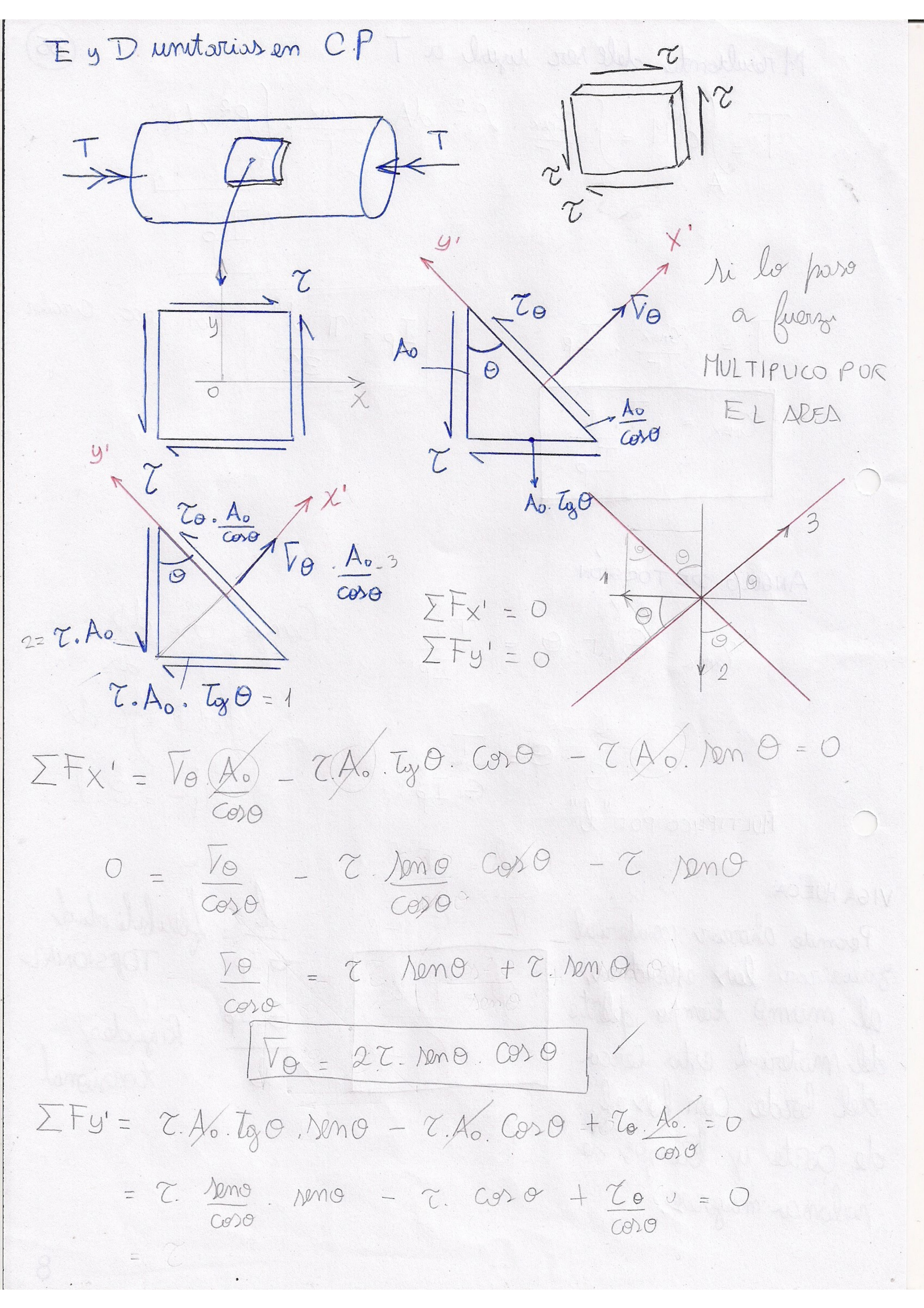
$$\boxed{\phi = \frac{T \cdot l}{G \cdot I_p}}$$

$\frac{l}{G I_p}$: flexibilidad TORSIONAL

$\frac{G \cdot I_p}{l}$: Rigidez torsional

VIGA HUECA

Permite ahorrar material y aligerar las estructuras, al mismo tiempo parte del material esta cerca del borde con los ef. de corte y brazos de palanca mayores.



E y D unitarias en C.P

$$\sum F_{x'} = 0$$
$$\sum F_{y'} = 0$$

$$\sum F_{x'} = \sigma_\theta \frac{A_0}{\cos\theta} - \tau A_0 \, tg\theta \cdot \cos\theta - \tau A_0 \cdot sen\,\theta = 0$$

$$0 = \frac{\sigma_\theta}{\cos\theta} - \tau \frac{sen\,\theta}{\cos\theta} \cos\theta - \tau \, sen\,\theta$$

$$\frac{\sigma_\theta}{\cos\theta} = \tau \, sen\,\theta + \tau \, sen\,\theta$$

$$\boxed{\sigma_\theta = 2\tau \cdot sen\,\theta \cdot \cos\theta}$$

$$\sum F_{y'} = \tau A_0 \, tg\theta \cdot sen\,\theta - \tau A_0 \cos\theta + \tau_\theta \frac{A_0}{\cos\theta} = 0$$

$$= \tau \frac{sen\,\theta}{\cos\theta} sen\,\theta - \tau \cos\theta + \frac{\tau_\theta}{\cos\theta} = 0$$

$$\tau \frac{sen^2\theta}{\cos\theta} + \tau \cos\theta = \frac{\tau_\theta}{\cos\theta}$$

$$\tau \left(\frac{-sen^2\theta}{\cos\theta} + \cos\theta \right) = \frac{\tau_\theta}{\cos}$$

$$\boxed{\tau_\theta = \tau \left(\cos^2\theta - sen^2\theta \right)}$$

DEF. UNITARIA EN CORTANTE PURO.

γ es una medida de distorsión, los lados NO cambian (incluido el espesor) de un p. rect. pasa a paralelepípedo oblicuo

Si el material es linealmente elástico la deformación por cortante para un elemento orientado en $\theta = 0°$ se relaciona con la Ley de Hooke en cortante $\gamma = \tau / G$

τ A τ — $\frac{\pi}{2} - \gamma$ (A), (B)

CONSIDERO ROTAR A 45°

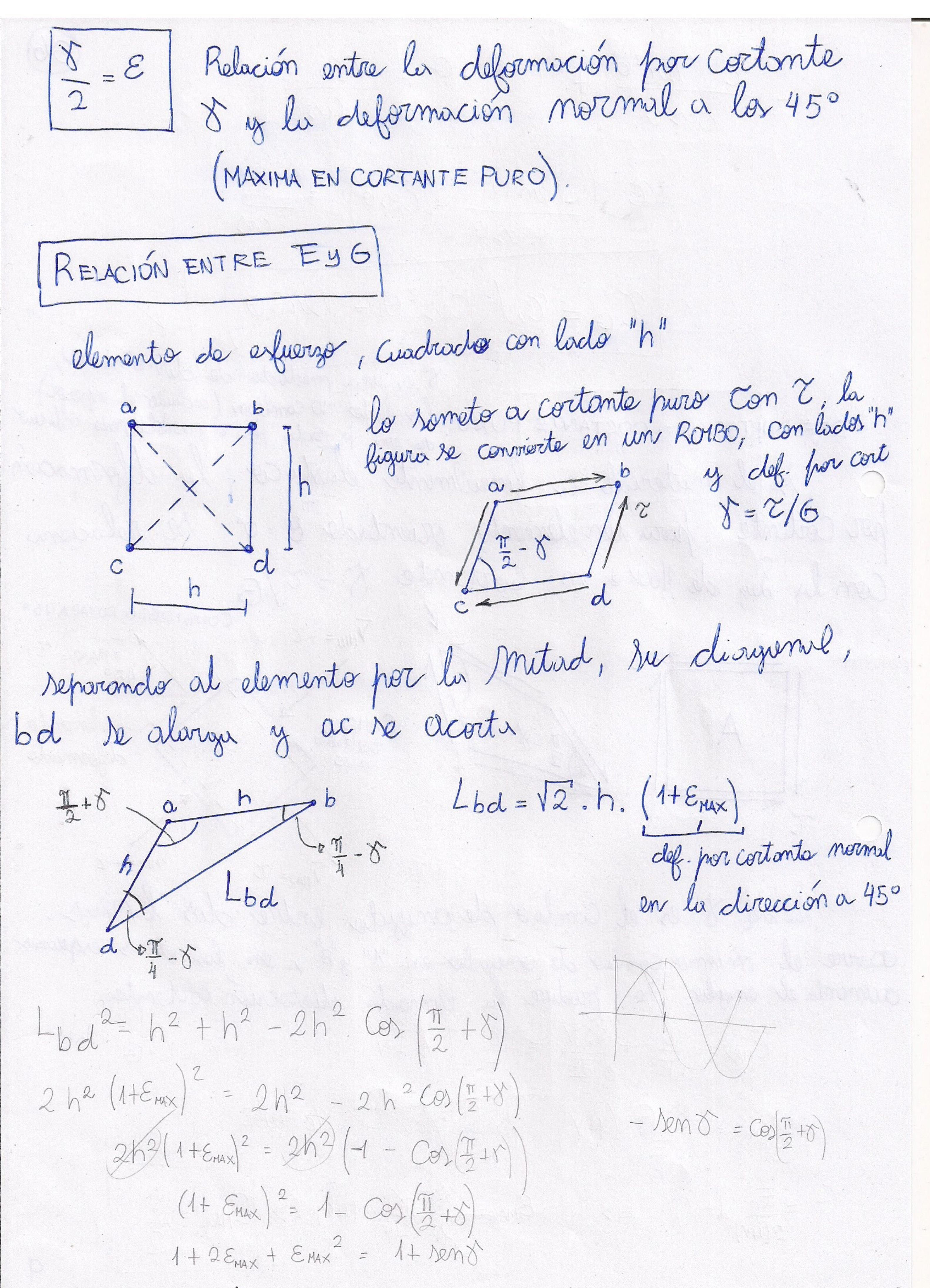
$\sigma_{MIN} = -\tau$; $\sigma_{MAX} = \tau$; 45° ; CAMBIOS DIMENSIONALES ; elemento deformado ; $\sigma_{MAX} = \tau$; $\sigma_{MIN} = -\tau$

La def. γ es el cambio de ángulo entre dos líneas. Ocurre el mismo cambio de ángulo en "A" y "B", en las otras esquinas aumenta el ángulo. Se produce la llamada distorsión cortante.

$$\varepsilon_{MAX} = \frac{\tau}{E} + \frac{\tau . V}{E} = \frac{\tau}{E}(1+V) \qquad \tau = \gamma . G$$

$$\varepsilon_{MAX} = \frac{\gamma . G}{E}(1+V)$$ sale por Ley de HOOKE

$$G = \frac{E}{2(1+V)} \Rightarrow \varepsilon_{MAX} = \frac{\gamma}{2E} \cdot \frac{E}{2(1+V)}(1+V) \Rightarrow \boxed{\varepsilon_{MAX} = \frac{\gamma}{2}}$$



$\frac{\gamma}{2} = \varepsilon$ Relación entre la deformación por cortante γ y la deformación normal a los 45° (MAXIMA EN CORTANTE PURO).

RELACIÓN ENTRE E y G

elemento de esfuerzo, cuadrado con lado "h"

lo someto a cortante puro con τ, la figura se convierte en un ROMBO, con lados "h" y def. por cort $\gamma = \tau / G$

separando al elemento por la mitad, su diagonal, bd se alarga y ac se acorta

$L_{bd} = \sqrt{2} \cdot h \cdot (1 + \varepsilon_{MAX})$

def. por cortante normal en la dirección a 45°

$$L_{bd}^2 = h^2 + h^2 - 2h^2 \cos\left(\frac{\pi}{2} + \gamma\right)$$

$$2h^2 (1 + \varepsilon_{MAX})^2 = 2h^2 - 2h^2 \cos\left(\frac{\pi}{2} + \gamma\right)$$

$$\cancel{2h^2} (1 + \varepsilon_{MAX})^2 = \cancel{2h^2} \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} + \gamma\right)\right)$$

$$(1 + \varepsilon_{MAX})^2 = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} + \gamma\right)$$

$$1 + 2\varepsilon_{MAX} + \varepsilon_{MAX}^2 = 1 + \operatorname{sen}\gamma$$

$-\operatorname{sen}\gamma = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \gamma\right)$

$$1 + 2\varepsilon_{MAX} + \varepsilon_{MAX}^2 = 1 + \operatorname{sen}\gamma$$

$\varepsilon_{MAX} = 0$ MUY PEQ $= \gamma$

$\operatorname{sen}\gamma = \gamma$

$\varepsilon^2 = 0$

$$1 + 2\varepsilon_{MAX} = 1 + \gamma$$

$$2\varepsilon_{MAX} = \gamma$$

$$\boxed{\varepsilon_{MAX} = \frac{\gamma}{2}}$$

$$\varepsilon_{MAX} = \frac{\gamma}{2}$$

$\tau = \gamma \cdot G$

$\frac{\tau}{G}$

$$\frac{\tau}{E}(1+v) = \frac{\tau}{G} \cdot \frac{1}{2}$$

$$(1+v) = \frac{E}{2G}$$

$$\boxed{G = \frac{E}{2(1+v)}}$$

$$\varepsilon_{MAX} = \frac{L_{FIN} - L_{IN}}{L_{IN}}$$

$\Delta L(+)$

POR POISSON es $-\frac{\tau v}{E}$

$$\varepsilon_{MAX} = \frac{\tau}{E} + \frac{\tau \cdot v}{E} = \frac{\tau}{E}(1+v)$$

$\frac{\sigma_{MAX}}{E}$ ($\frac{\tau}{E}$)

$\frac{\tau \cdot v}{E}$ → POISSON → ORTOGONAL

$\sigma = \varepsilon \cdot E$

$\sigma = \tau$

→ POR LA TRACCION

ENERGÍA DE DEFORMACIÓN

- mismos conceptos básicos que en axial.
- barra prismática AB en torsión pura ante la acción de un T.

- gira φ en el extremo.
- MAT. LIN. ELASTICO Y SIGUE HOOKE

$$\phi = \frac{T \cdot l}{G I_p}$$

- Peq. angulo de torsión.

$$\frac{\phi \cdot G \cdot I_p}{l} = T \qquad W = \int_0^{\phi_{MAX}} T \, d\phi$$

$$U = W = \frac{T \cdot \phi}{2}$$

$$W = \int_0^{\phi_{MAX}} \frac{\phi \cdot G \cdot I_p}{l} \, d\phi$$

$$\boxed{W = \frac{G \cdot I_p}{l} \cdot \frac{\phi_{MAX}^2}{2}}$$

$$U = \frac{T}{2} \cdot \frac{T \cdot l}{G I_p} = \boxed{\frac{T^2 \cdot l}{2 G \cdot I_p}}$$

$$\frac{T^2 l}{2 G I_p} = \frac{G \cdot I_p}{2 l} \cdot \frac{T^2 l^2}{G^2 I_p^2}$$

U en CP.

El analisis inicia considerando un elemento pequeño de material sometido a esfuerzos τ. Se supone un cuadrado de lado "h" con espesor t.

Las fuerzas cortantes V sobre las caras laterales se determinan como $\boxed{V = \tau \cdot h \cdot t}$

V $\frac{\pi}{2} - \gamma$ γ

... cuador así

Sup. al material L.E y que cumple con HOOKE

$\boxed{\delta = \gamma \cdot h}$ el desplazamiento

$W = U = \frac{V \cdot \delta}{2}$ → EN DEF. ALMACENADA POR EL ELEMENTO, si supongo que el mat es linealm. elastico y que obedece HOOKE

energia de def. almacenada →

$U = \frac{\tau \cdot h \cdot t \cdot \delta}{2}$, Sabiendo que $\delta = \gamma \cdot h$

$$U = \frac{\tau \cdot h^2 \cdot t \cdot \gamma}{2}$$

$$u = \frac{U}{Vol} = \frac{U}{h^2 \cdot t} = \frac{\tau \cdot h^2 \cdot t \cdot \gamma}{2 h^2 \cdot t}$$

$$\boxed{u = \frac{\tau \cdot \gamma}{2} = \frac{\tau^2}{2G} = \frac{G \cdot \gamma^2}{2}}$$

u densidad de energia de deformacion

TUBOS DE PARED DELGADA

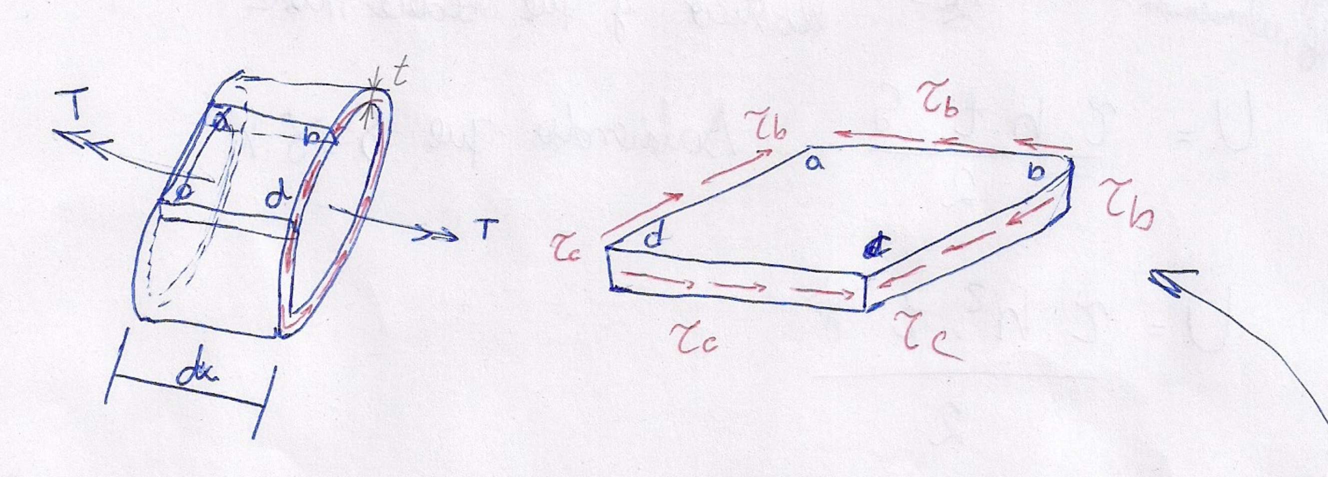
- UNICELULARES
- SOBRE BARRAS PRISMATICAS.

SUPOSICIONES → BREDT → 1ª: Los τ son paralelos y tangentes a la fibra media

2ª Son todos iguales en magnitud

Se considera un tubo de pared delgada, secc. transv arbitraria y se encuentra sometido a un T

Los esfuerzos τ "fluyen" alrededor de la sección, actúan paralelos a los límites de la sección transversal.

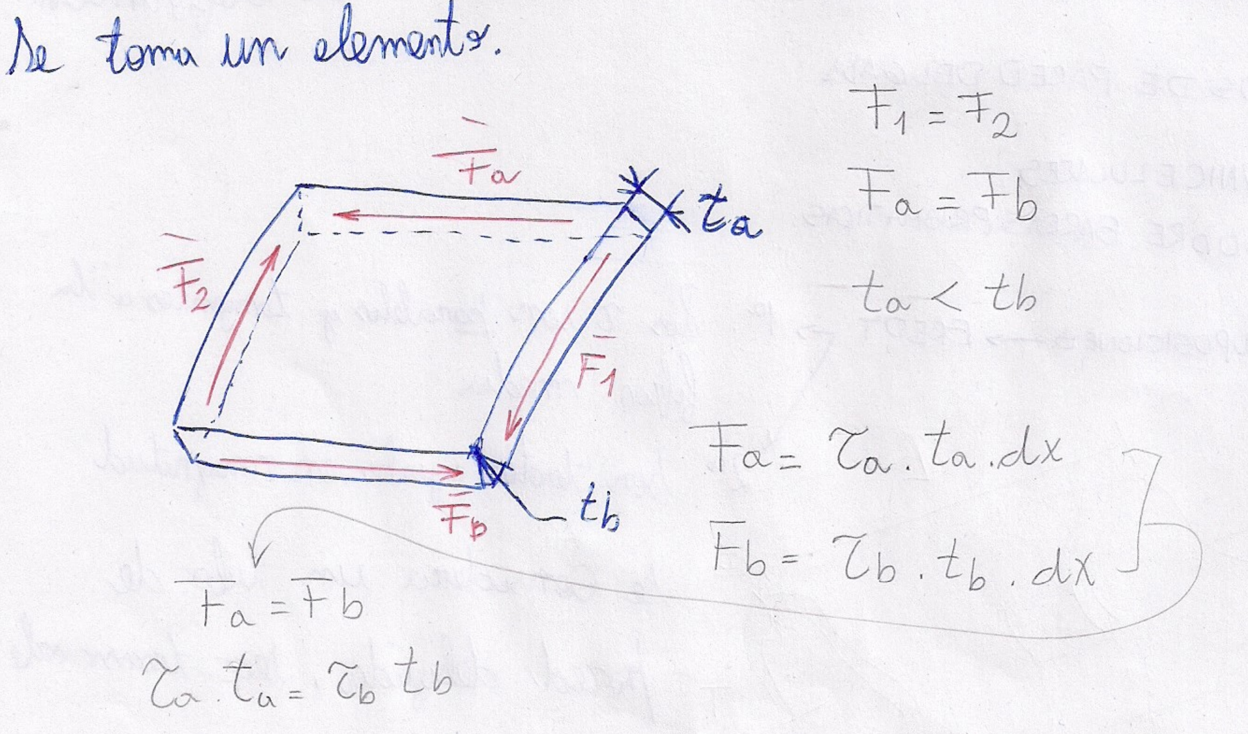


los esfuerzos varían ligeramente con el espesor, pero al suponer un t muy pequeño, casi no varían y permanecen prácticamente cte.

$t \neq cte$

se busca determinar la magnitud de los esfuerzos.

Se toma un elemento.



$F_1 = F_2$

$F_a = F_b$

$t_a < t_b$

$F_a = \tau_a . t_a . dx$

$F_b = \tau_b . t_b . dx$

$F_a = F_b$

$\tau_a . t_a = \tau_b \, t_b$

$\tau . t = cte \implies$ FLUJO DE CORTE es cte!

1ª Ec. de BREDT. (relación entre f y T)

tomamos la secc. transversal.

Línea mediana (discontinua)

se considera un elemento de área con longitud dS y espesor t.

S define la ubicación del elemento se mide a lo largo de la línea media y se elige arbitrariamente.

$f.ds$ es la fuerza cortante y el momento con respecto a cualq. punto es

$$dT = f\,ds\,.\,r.$$

$$T = f\int_0^{Lm} r.ds$$ se integra a lo largo de Lm

(doble del área del ◺ sombreado arriba)

$$\int_0^{lm} r.ds = 2A_m$$ (2 veces el área contenida por la línea mediana).

$$T = f\,2A_m$$

$$T = t.\tau\,2A_m$$

$$\boxed{\tau = \frac{T}{2A_m t}}$$ PRIMERA ECUACIÓN DE BREDT

SEGUNDA EC. BREDT

determinar primero la E.I.D. de un tubo de pared delgado.

Area = $t \cdot ds$ (en la secc. transversal)

longitud dx

el volumen es $t \cdot ds \cdot dx$

IGUAL AL ANTERIOR

ELEMENTO C. P.

t, dx, ds

por estar en cortante puro, la μ es $\mu = \frac{\tau^2}{2G}$

$$dU = \mu \cdot Vol = \frac{\tau^2}{2G} \cdot t \cdot ds\, dx \qquad f = t \cdot \tau$$

$$dU = \frac{f^2}{2t^2 G} \cdot t \cdot ds\, dx \qquad \tau = \frac{f}{t}$$

$$dU = \frac{f^2}{2G} \frac{ds}{t} \cdot dx$$

Integro sobre todo el volumen.

a lo largo de linea media

a lo largo del tubo.

$$U = \int dU = \frac{f^2}{2G} \int_0^{L_m} \frac{ds}{t} \int_0^{L} dx$$

$$U = \frac{f^2 \cdot L}{2G} \int_0^{L_m} \frac{ds}{t} = \frac{T^2 \cdot L}{8GA_m^2} \int_0^{L_m} \frac{ds}{t} \qquad f = \frac{T}{2A_m}$$

J = cte de TORSION

$$J = \frac{4A_m^2}{\int_0^{L_m} \frac{ds}{t}}$$

$$U = \frac{1}{2} T \cdot \phi$$

$$\frac{T^2 \cdot L}{8G \cdot A_m^2} \int_0^{L_m} \frac{ds}{t} = \frac{1}{2} T \cdot \phi$$

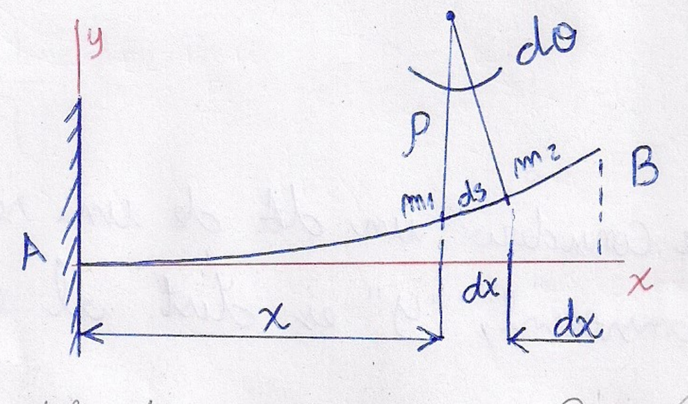
$$\boxed{\phi = \frac{T \cdot L}{4GA_m^2} \int_0^{L_m} \frac{ds}{t}} \qquad \boxed{\phi = \frac{T \cdot L}{G \cdot J}}$$

FLEXIÓN

- Hipotesis: Las secciones permanecen planas y ortogonales respecto a la directriz formada.

FLEXIÓN PURA: NO HAY Q. $M_f = cte$

" NO UNIFORME = $M_f \neq cte$. HAY Q.



$K = \frac{1}{\rho}$

Curva de deflexión.

→ angulo entre normales, Total

del $\Delta\, m_1 m_2 O \rightarrow \rho . d\theta = ds$

↳ distancia entre m_1 y m_2

$\rho = \frac{ds}{d\theta}$

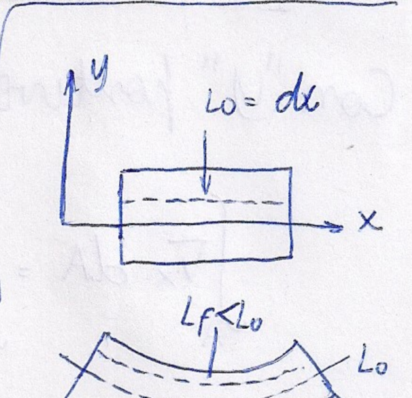
$K = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds}$

↳ como las deflexiones SON PEQUEÑAS

la Curva es Casi plana

$ds \approx dx$

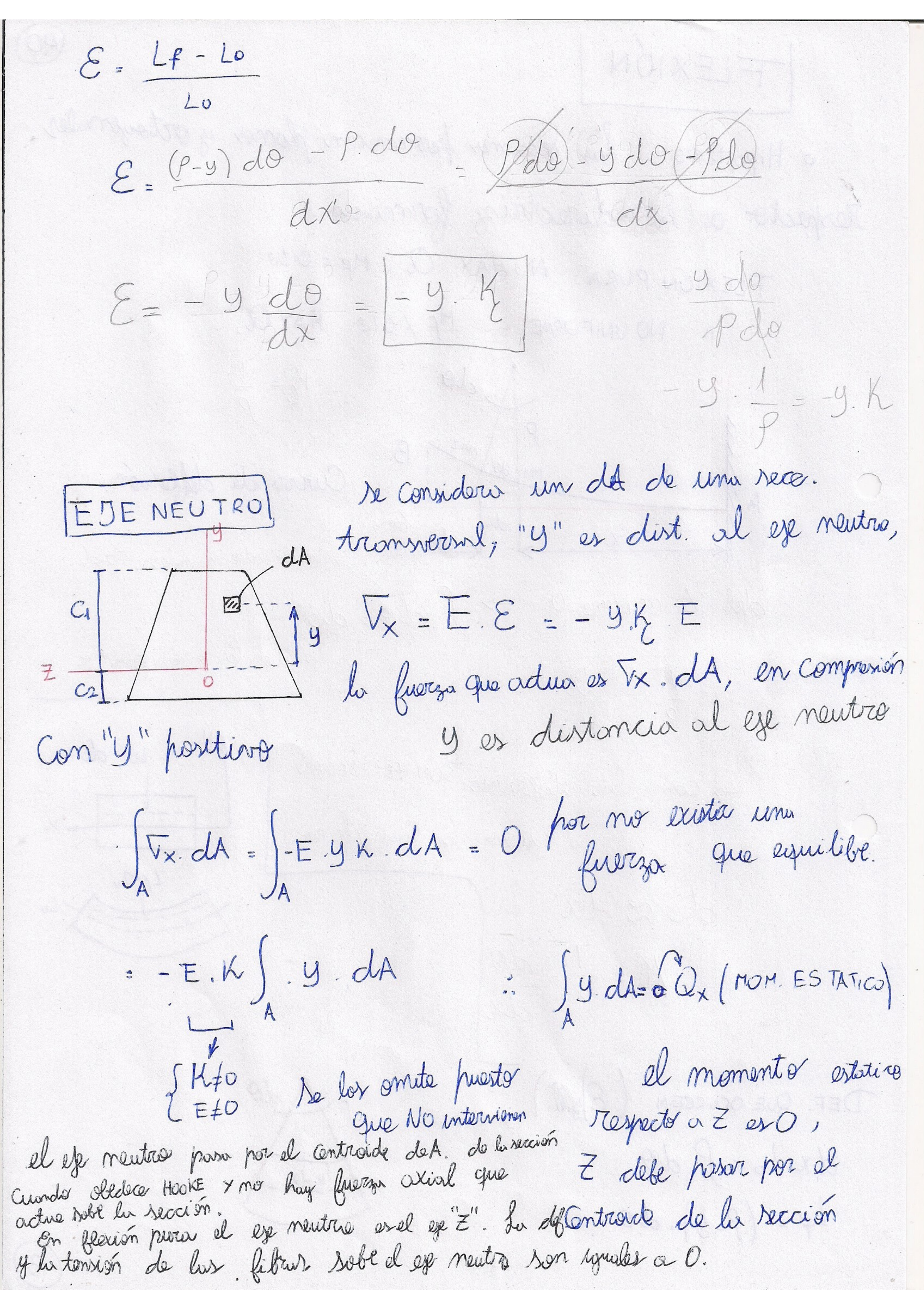
$K = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx}$



DEF. QUE OCURREN (ε)

$dx = L_0 = \rho . d\theta$

$L_f = (\rho - y) . d\theta$



$$\varepsilon = \frac{L_f - L_o}{L_o}$$

$$\varepsilon = \frac{(\rho - y)\, d\theta - \rho \, d\theta}{dx} = \frac{\rho\, d\theta - y\, d\theta - \rho\, d\theta}{dx}$$

$$\varepsilon = -y \frac{d\theta}{dx} = \boxed{-y \cdot K_\xi} \qquad \frac{-y\, d\theta}{\rho\, d\theta}$$

$$-y \cdot \frac{1}{\rho} = -y \cdot K$$

EJE NEUTRO

Se considera un dA de una secc. transversal; "y" es dist. al eje neutro,

$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon = -y K_\xi E$$

la fuerza que actua es $\sigma_x \cdot dA$, en compresión

y es distancia al eje neutro

Con "y" positivo

$$\int_A \sigma_x \, dA = \int_A -E\, y\, K \, dA = 0$$ por no existir una fuerza que equilibre.

$$= -E \cdot K \int_A y \, dA \quad \therefore \quad \int_A y \, dA = 0 \quad Q_x \text{ (MOM. ESTATICO)}$$

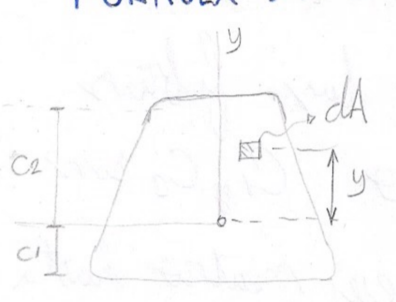
$\begin{cases} K \neq 0 \\ E \neq 0 \end{cases}$ Se los omite puesto que NO intervienen

el momento estatico respecto a Z es 0, Z debe pasar por el Centroide de la sección

el eje neutro pasa por el centroide de A. de la sección cuando obedece HOOKE y no hay fuerza axial que actue sobre la sección.

En flexión pura el eje neutro es el eje "Z". La def y la tensión de las fibras sobre el eje neutro son iguales a 0.

FORMULA DE LA FLEXIÓN



por estática el Mflector debe ser igual al generado por σ_x dA y
Como esta arriba del eje neutro, el Mflector y σ_x y dA tienen signos opuestos.

$$dM = -\sigma_x \cdot y \cdot dA$$

$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon$$

$$\sigma_x = E \cdot -K \cdot y = -K \cdot y \cdot E$$

$$\int dM = -\int_A \sigma_x \cdot y \cdot dA$$

$$M = -\int -K \cdot E \cdot y \cdot y \cdot dA$$

$$M = K \cdot E \cdot I$$

$$\boxed{K = \frac{M}{E \cdot I}} = \frac{1}{\rho}$$

$$M = \int_A K \cdot E \cdot y^2 \, dA$$

$$M = K \cdot E \underbrace{\int_A y^2 \cdot dA}_{I}$$

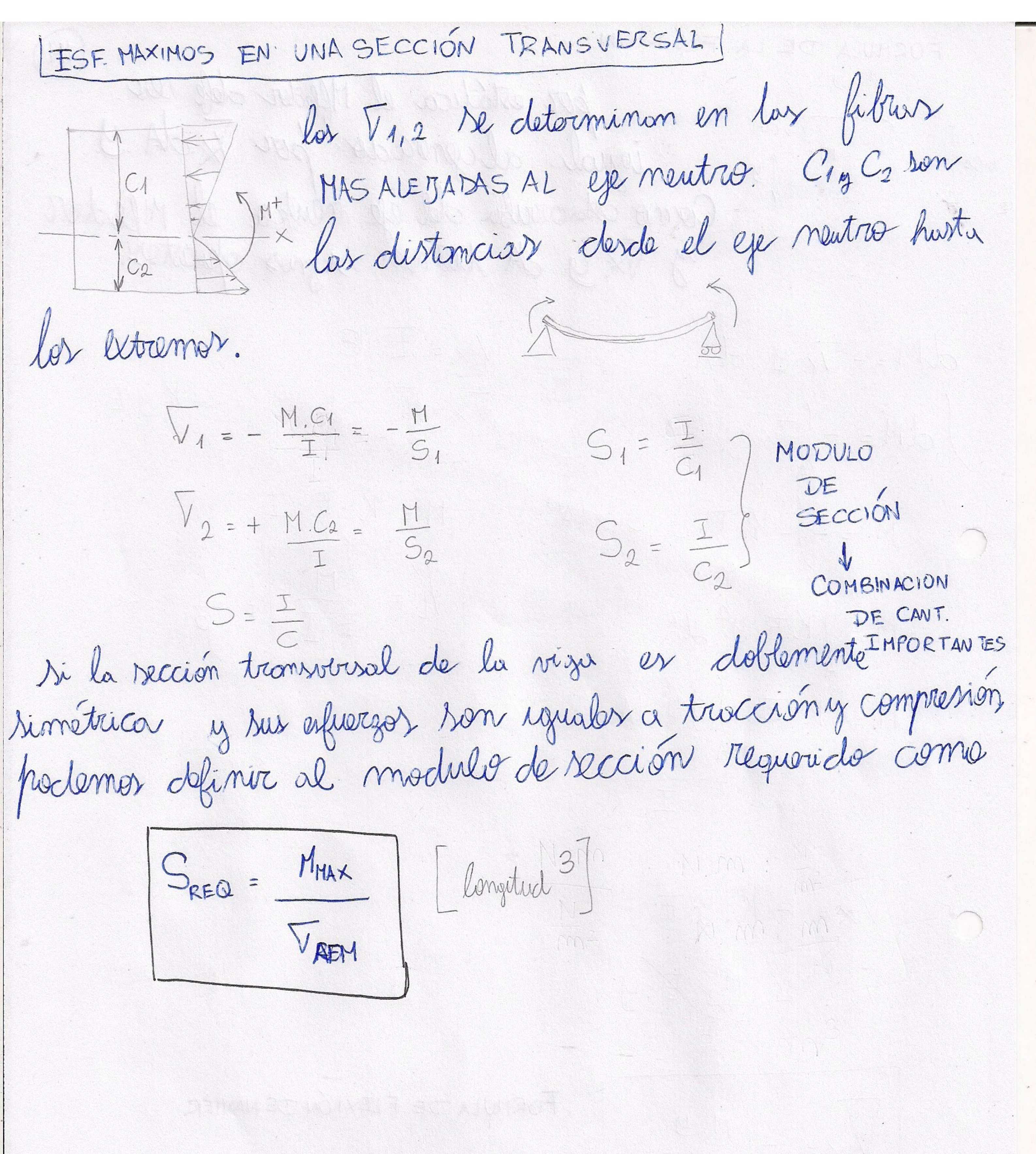
$$\sigma_x = -K \cdot y \cdot E$$

$$\sigma_x = -\frac{M}{\cancel{E} I} \cdot \cancel{E} \cdot y$$

$$\boxed{\sigma_x = -\frac{M \cdot y}{I_z}}$$

FORMULA DE FLEXIÓN DE NAVIER

ESF. MAXIMOS EN UNA SECCIÓN TRANSVERSAL



Los $\sigma_{1,2}$ se determinan en las fibras MAS ALEJADAS AL eje neutro. C_1 y C_2 son las distancias desde el eje neutro hasta los extremos.

$$\sigma_1 = -\frac{M \cdot C_1}{I} = -\frac{M}{S_1}$$

$$\sigma_2 = +\frac{M \cdot C_2}{I} = \frac{M}{S_2}$$

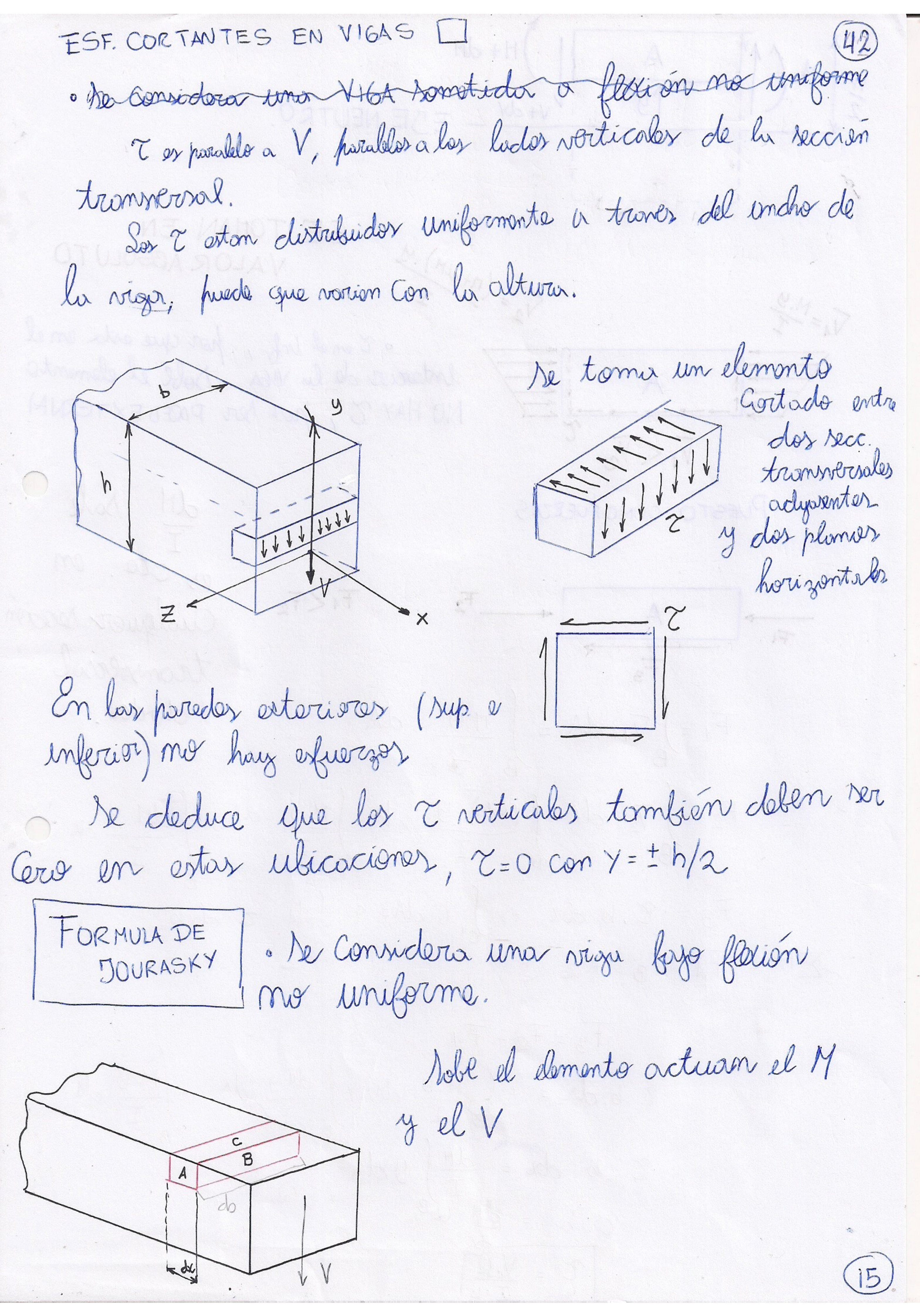
$$S_1 = \frac{I}{C_1} \qquad S_2 = \frac{I}{C_2}$$

MODULO DE SECCIÓN → COMBINACION DE CANT. IMPORTANTES

$$S = \frac{I}{C}$$

Si la sección transversal de la viga es doblemente simétrica y sus esfuerzos son iguales a tracción y compresión podemos definir al modulo de sección requerido como

$$\boxed{S_{REQ} = \frac{M_{MAX}}{\sigma_{ADM}}} \quad [\text{longitud}^3]$$



• ~~Se considera una VIGA sometida a flexión no uniforme~~

τ es paralelo a V, paralelos a los lados verticales de la sección transversal.

Los τ estan distribuidos uniformente a traves del ancho de la viga, puede que varien con la altura.

Se toma un elemento cortado entre dos secc. transversales adyacentes y dos planos horizontales

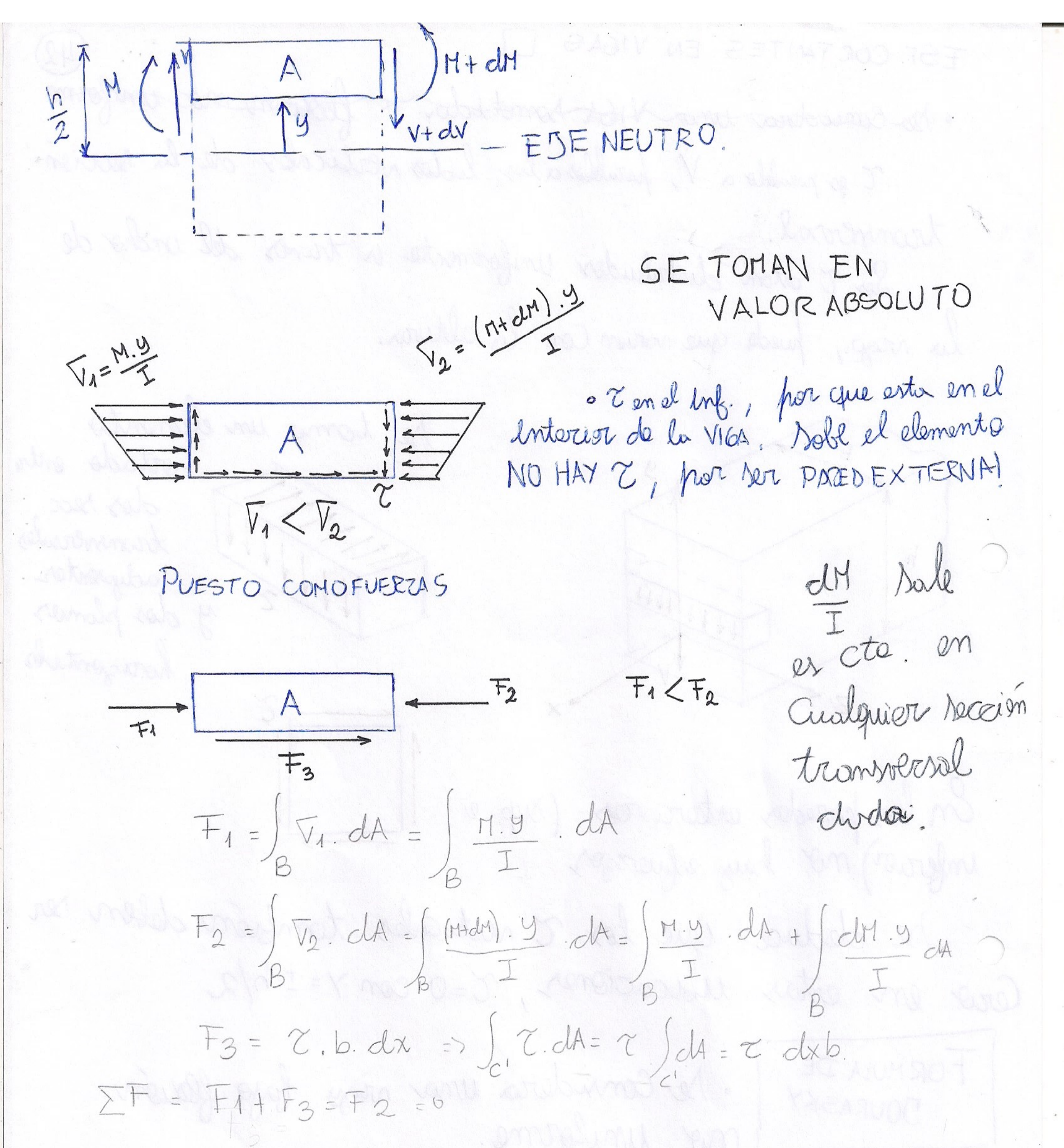
En las paredes exteriores (sup. e inferior) no hay esfuerzos

Se deduce que los τ verticales también deben ser cero en estas ubicaciones, $\tau = 0$ con $y = \pm h/2$

FORMULA DE JOURASKY

• Se considera una viga bajo flexión no uniforme.

Sobre el elemento actuan el M y el V



$$F_1 = \int_B \sigma_1 . dA = \int_B \frac{M.y}{I} . dA$$

$$F_2 = \int_B \sigma_2 . dA = \int_B \frac{(M+dM).y}{I} . dA = \int_B \frac{M.y}{I} . dA + \int_B \frac{dM.y}{I} dA$$

$$F_3 = \tau . b . dx \Rightarrow \int_{C'} \tau . dA = \tau \int_{C'} dA = \tau \, dx b .$$

$$\sum F = F_1 + F_3 = F_2 = 0$$

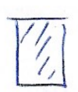
$$F_3 = F_2 - F_1$$

$$\tau \, b . dx = + \int_B \frac{M.y}{I} dA + \int_B \frac{dM.y}{I} dA - \int_B \frac{M.y}{I} dA$$

$$\tau . b . dx = \frac{dM}{I} \int_B y \, dA \quad \rightarrow = Q$$

$$\tau . b = \frac{dM}{dx} . Q$$

$$\boxed{\tau = \frac{V.Q}{I.b}}$$

DISTRIBUCIÓN DE ESF. CORTANTE 

y, z, $\frac{h}{2}$, $h/2$, y_1, b

τ, τ_{MAX}, $\frac{h}{2}$, $h/2$

$$Q = b.\left(\frac{h}{2} - y_1\right).\left(y_1 + \frac{h/2 - y_1}{2}\right) = b\left(\frac{h}{2} - y_1\right)\left(y_1 + \frac{h}{4} - \frac{y_1}{2}\right)$$

$$= b\left(\frac{h}{2} - y_1\right)\left(\frac{h}{4} + \frac{y_1}{2}\right) = b\left(\frac{h^2}{8} + \frac{h.y_1}{4} - \frac{hy_1}{4} - \frac{y_1^2}{2}\right)$$

$$Q = b\left(\frac{h^2}{8} - \frac{y_1^2}{2}\right) = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y_1^2\right)$$

$$\tau = \frac{V.Q}{b.I} = \frac{V}{b.I}\frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y_1^2\right) = \boxed{\frac{V}{2I}\left(\frac{h^2}{4} - y_1^2\right)}$$

↳ VARIAN CUADRATICAMENTE CON y_1

$$\tau_{(y_1 = \pm\frac{h}{2})} = \frac{V}{2I}\left(\frac{h^2}{4} - \frac{h^2}{4}\right) = 0$$

$$\tau_{MAX(y_1=0)} = \frac{V}{2I}\left(\frac{h^2}{2^2}\right) = \boxed{\frac{V.h^2}{8I}}$$

$$\tau_{PROM} = \frac{V}{A}$$

$$\tau_{MAX} = \frac{V.h^2}{8I} = \frac{V.h^2}{8.\frac{b.h^3}{12}} = \frac{12V.h^2}{8b.h^3} = \frac{3}{2}\frac{V}{b.h}$$

($b.h = A$)

$$\tau_{MAX} = \frac{3}{2}\frac{V}{A}$$

LIMITADO A!
- VIGA de mat. homogeneo LE con deflex. pequeñas

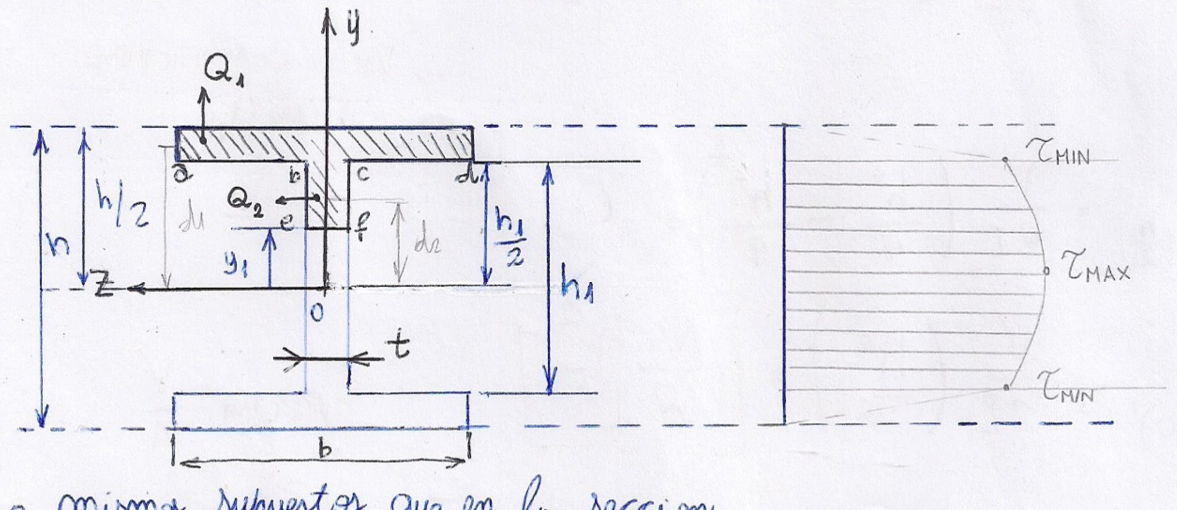
$$\boxed{\tau_{MAX} = \frac{3V}{2A}}$$

Analisis valido para vigas de material LE Con deflexiones pequeñas. Para el correcto uso de las formulas debe cumplirse que:

- Los bordes de la sección transversal deben ser paralelos al eje y
- Los esfuerzos Cortantes deben ser uniformes a traves del ancho de la sección transversal.
- valido solo para vigas prismaticas. y los resultado serán mas exactos Conforme aumente el Cociente h/b

---

ESFUERZOS CORTANTES EN LAS ALMAS DE VIGAS CON PATINES.



- mismos supuestos que en la seccion rectangular

$$A_1 = b\left(-\frac{h_1}{2} + \frac{h}{2}\right) = b\left(\frac{h}{2} - \frac{h_1}{2}\right) \qquad Q_1 = A_1 \cdot \left(\frac{h_1}{2} + \frac{h/2 - h_1/2}{2}\right)$$

$$A_2 = t \cdot \left(\frac{h_1}{2} - y_1\right) \qquad Q_2 = A_2 \cdot \left(y_1 + \frac{\frac{h_1}{2} - y_1}{2}\right)$$

$$Q = Q_1 + Q_1 = b \cdot \left(\frac{h}{2} - \frac{h_1}{2}\right) \cdot \left(\frac{h_1}{2} + \frac{h}{4} - \frac{h_1}{4}\right)$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{2-1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$Q_1 = b\left(\frac{h}{2} - \frac{h_1}{2}\right) \cdot \left(\frac{h_1}{4} + \frac{h}{4}\right)$$

$$Q_1 = \frac{b}{8}\left(h - h_1\right)\left(h_1 + h\right) = \boxed{\frac{b}{8}\left(h^2 - h_1^2\right)}$$

$$\cancel{h \cdot h_1} + h^2 - h_1^2 - \cancel{h_1 \cdot h}$$

$$Q_2 = t \cdot \left(\frac{h_1}{2} - y_1\right) \cdot \left(y_1 + \frac{h_1}{4} - \frac{y_1}{2}\right)$$

$$= t\left(\frac{h_1}{2} - y_1\right)\left(\frac{y_1}{2} + \frac{h_1}{4}\right) = t\left[\cancel{\frac{h_1 y_1}{4}} + \frac{h_1^2}{8} - \frac{y_1^2}{2} - \cancel{\frac{h_1 \cdot y_1}{4}}\right]$$

$$= t\left(\frac{h_1^2}{8} - \frac{y_1^2}{2}\right) = \frac{t}{2}\left(\frac{h_1^2}{4} - y_1^2\right) = \boxed{\frac{t}{8}\left(h_1^2 - 4y_1^2\right)}$$

$$Q_1 + Q_2 = \frac{b}{8}\left(h^2 - h_1^2\right) + \frac{t}{8}\left(h_1^2 - 4y_1^2\right) = Q$$

NO cte ("x")

$$\tau = \frac{V \cdot Q}{I\,t} = \frac{V}{8It}\left[b\left(h^2 - h_1^2\right) + t\left(h_1^2 - 4y_1^2\right)\right]$$

$$I = \frac{bh^3}{12} - \frac{(b-t)\,h_1^3}{12} = \frac{1}{12}\left(b \cdot h^3 - b \cdot h_1^3 + t \cdot h_1^3\right)$$

$$\tau_{MAX} = \frac{V}{8I \cdot t}\left(b \cdot h^2 - b \cdot h_1^2 + t \cdot h_1^2\right)$$

$$\tau_{MIN} = \frac{V \cdot b}{8 \cdot I \cdot t}\left(h^2 - h_1^2\right)$$

FUERZA CORTANTE EN EL ALMA.

$$V_{ALMA} = t \cdot A_{\text{del diagrama de esf. cortante}}$$

$$V_{ALMA} = t \left[h_1 \cdot \tau_{MIN} + \frac{2}{3}(h_1)(\tau_{MAX} - \tau_{MIN}) \right]$$

$$= t \left[h_1 \cdot \tau_{MIN} + \frac{2}{3} h_1 \cdot \tau_{MAX} - \frac{2}{3} h_1 \cdot \tau_{MIN} \right]$$

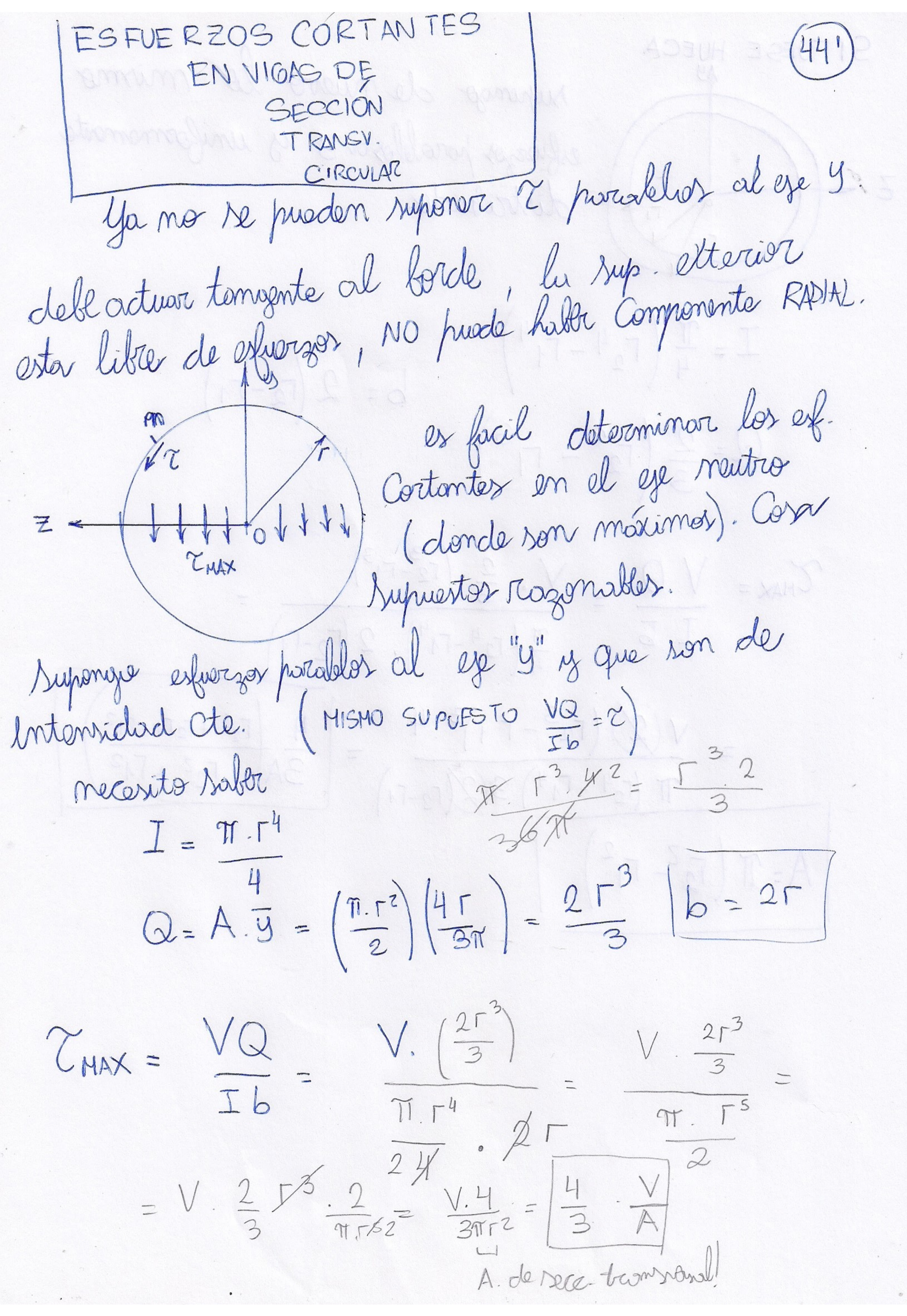
$$= t \left[\frac{h_1 \tau_{MIN}}{3} + \frac{2}{3} h_1 \tau_{MAX} \right]$$

$$V_{ALMA} = \boxed{\frac{t}{3} h_1 \left(\tau_{MIN} + 2 \tau_{MAX} \right)}$$

$$\boxed{\tau_{PROM} = \frac{V}{t \cdot h_1}}$$

VALOR APROX. USADO POR LOS DISEÑADORES

El analisis es adecuado para determinar esfuerzos cortantes verticales en el alma de una viga de patin ancho. Sin embargo, no es valido para analizar los esfuerzos cortantes verticales en los patines al no poder suponer que estos son constantes a traves del ancho de las mismas. Por otro lado, las formulas si son eficientes para determinar esfuerzos cortantes actuando Horizontalmente.



ESFUERZOS CORTANTES EN VIGAS DE SECCIÓN TRANSV. CIRCULAR

Ya no se pueden suponer τ paralelos al eje y: debe actuar tangente al borde, la sup. exterior está libre de esfuerzos, NO puede haber Componente RADIAL.

es fácil determinar los ef. Cortantes en el eje neutro (donde son máximos). Con supuestos razonables.

Supongo esfuerzos paralelos al eje "y" y que son de intensidad Cte. (MISMO SUPUESTO $\frac{VQ}{Ib} = \tau$)

necesito saber

$$\frac{\pi \cdot r^3 \cdot 4 \cdot 2}{3 \cdot 6 \pi} = \frac{r^3 \cdot 2}{3}$$

$$I = \frac{\pi \cdot r^4}{4}$$

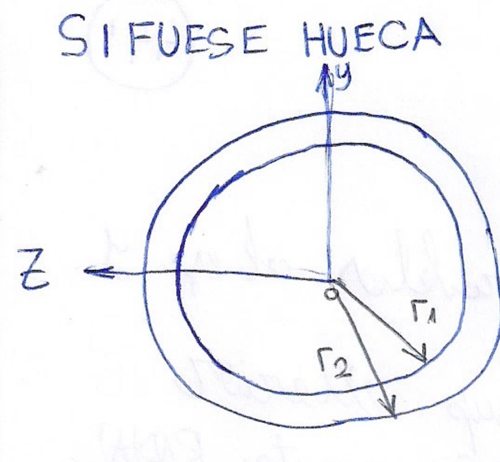
$$Q = A \cdot \bar{y} = \left(\frac{\pi \cdot r^2}{2}\right)\left(\frac{4r}{3\pi}\right) = \frac{2r^3}{3} \qquad \boxed{b = 2r}$$

$$\tau_{MAX} = \frac{VQ}{Ib} = \frac{V \cdot \left(\frac{2r^3}{3}\right)}{\frac{\pi \cdot r^4}{2 \cdot 4} \cdot 2r} = \frac{V \cdot \frac{2r^3}{3}}{\frac{\pi \cdot r^5}{2}} =$$

$$= V \cdot \frac{2}{3} r^3 \cdot \frac{2}{\pi r^5} = \frac{V \cdot 4}{3\pi r^2} = \boxed{\frac{4}{3} \cdot \frac{V}{A}}$$

A. de secc. transversal!

SI FUESE HUECA



suponjo de nuevo lo mismo esfuerzos paralelos a y y uniformemente distribuido.

$$I = \frac{\pi}{4}\left(r_2^4 - r_1^4\right) \qquad b = 2\left(r_2 - r_1\right)$$

$$Q = \frac{2}{3}\left(r_2^3 - r_1^3\right)$$

$$\tau_{MAX} = \frac{V \cdot Q}{I \cdot b} = \frac{V \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(r_2^3 - r_1^3\right)}{\frac{\pi}{4}\left(r_2^4 - r_1^4\right) \cdot 2\left(r_2 - r_1\right)} =$$

$$= \frac{V \cdot 2 \left(r_2^3 - r_1\right)^3 \cdot 4}{\pi \left(r_2^4 - r_1^4\right) \cdot 3 \cdot 2 \left(r_2 - r_1\right)} = \boxed{\frac{4}{3A}\left(\frac{r_2^2 + r_2 r_1 + r_1^2}{r_2^2 + r_1^2}\right)}$$

$$\boxed{A = \pi\left(r_2^2 - r_1^2\right)}$$

FLUJO CORTANTE

Se define como la fuerza cortante horizontal por unidad de longitud a lo largo del eje longitudinal. El concepto es utilizado para obtener las fuerzas cortantes horizontales que actuan entre los [?] portes de vigas armadas

el sentido de τ se saca con el diagrama de momentos

$\sigma_1 > \sigma_2$

$F_1 > F_2$

$F_1 = F_3 + F_2$

$$\sigma_1 = \frac{(M+dM)\,y}{I}$$

$$\sigma_2 = \frac{M \cdot y}{I}$$

VALORES ABSOLUTOS

$$F_1 = \int_{\Omega} \sigma_1 \cdot dA =$$

$$F_2 = \int_{\Omega} \sigma_2 \, dA$$

$$F_3 = F_1 - F_2$$

$$F_3 = \int \frac{dM}{I} \cdot y \, dA + \int \frac{M \cdot I}{y} dA - \int \frac{M \cdot I}{y} \cdot dA$$

$$F_3 = \frac{dM}{I} \underbrace{\int y \cdot dA}_{Q_e}$$

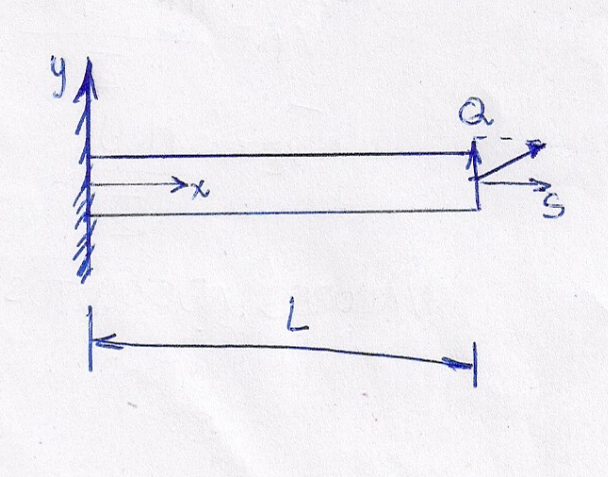
$$F_3 = \frac{dM \cdot Q_e}{I}$$

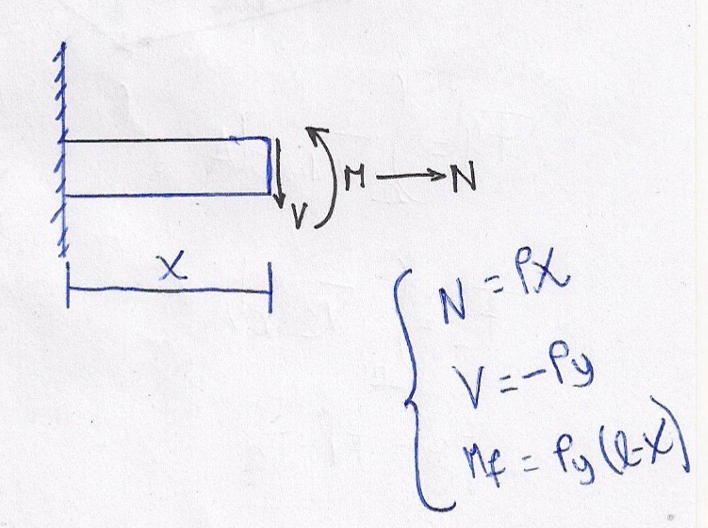
$$\frac{F_3}{dx} = \frac{dM}{dx} \cdot \frac{Q}{I}$$

$$\boxed{f = \frac{V \cdot Q}{I}}$$

VIGAS CON CARGAS AXIALES

elementos estructurales a menudo se someten a la acción simultanea de cargas de flexión y cargas axiales. Los esfuerzos combinados se pueden superponer y así obtenerlos





$$\begin{cases} N = P_x \\ V = -P_y \\ M_f = P_y (l - x) \end{cases}$$

N y M producen esfuerzos normales.

$\sigma = \frac{N}{A}$ → $\sigma = -\frac{M \cdot y}{I}$ (Compresion arriba, tracción abajo (+))

$$\sigma = \frac{N}{A} - \frac{M \cdot y}{I}$$

N → positiva en tracción!

3 Casos posibles (Ej con N(+) y M(+))

$\sigma_M < \sigma_N$ | $\sigma_M = \sigma_N$ | $\sigma_M > \sigma_N$

Si es de Compresion N, o M esta en otro sentido cambiará de manera correspondiente. el eje neutro se ve desplazado al actuar N y M.

CARGAS AXIALES EXCENTRICAS

N. no actua en el Centroide de la sección transversal.

P e se denomina excentricidad de la Carga.

A B P x

se Comporta como una viga sometida a momento y Carga Axial.

A B P P.e x

$-P.e = M$

$$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{\overbrace{P.e}^{M}.y}{I}$$

I ↳ es el Momento de inercia Con el eje Z.

A ↳ es el area de la sección transversal

La posicion del eje neutro se determina con $\sigma = 0$

$$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{P.e.y}{I}$$

$$0 = \frac{P}{A} + \frac{P.e.y}{I}$$

$$-\frac{P}{A} = \frac{P.e.y}{I}$$

$$\boxed{-\frac{I}{A.e} = y_0}$$

↳ desde el eje Z a el n-n

y P Z e $-y_0$ n n ⊕ n ⊖

- Si $e = 0$; la carga que actua en el centroide de área de la seccion transversal de la viga, el eje neutro esta a una distancia infinita y la distribución de esfuerzos es uniforme. (Existe solo carga axial)
- Si $e \to \infty$, la carga actua a una distancia infinita, el eje neutro pasa por el centroide de area de la sección transversal de la viga (eje Z) y la distribución de esfuerzos es la misma que en flexión pura.

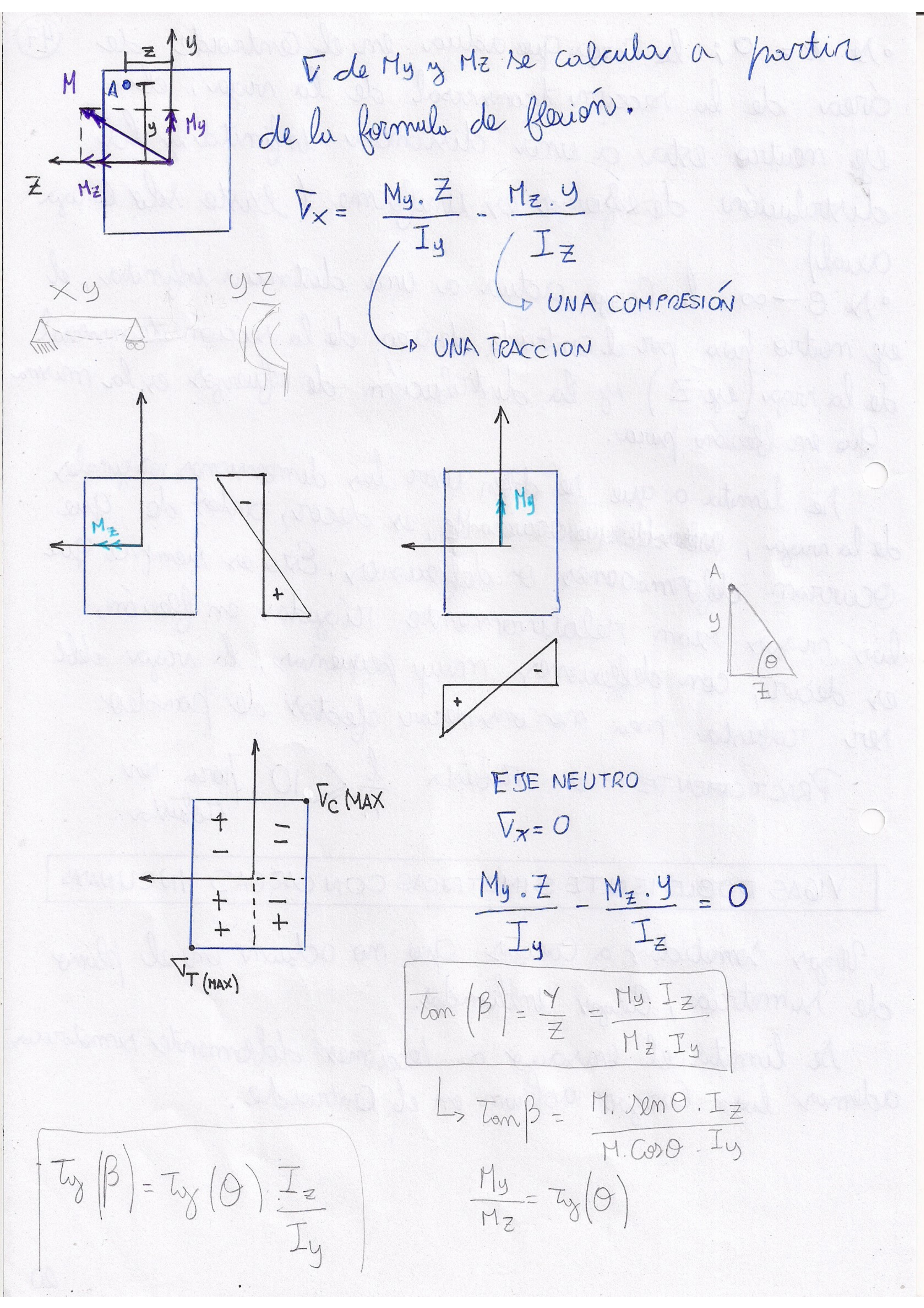
Se limita a que se deben usar las dimensiones originales de la viga, al determinar el M_f, es decir, antes de que ocurran deformaciones o deflexiones. Esto es siempre que las vigas sean relativamente rígidas en flexión, es decir, con deflexiones muy pequeñas; la viga debe ser robusta para no considerar efectos de pandeo.

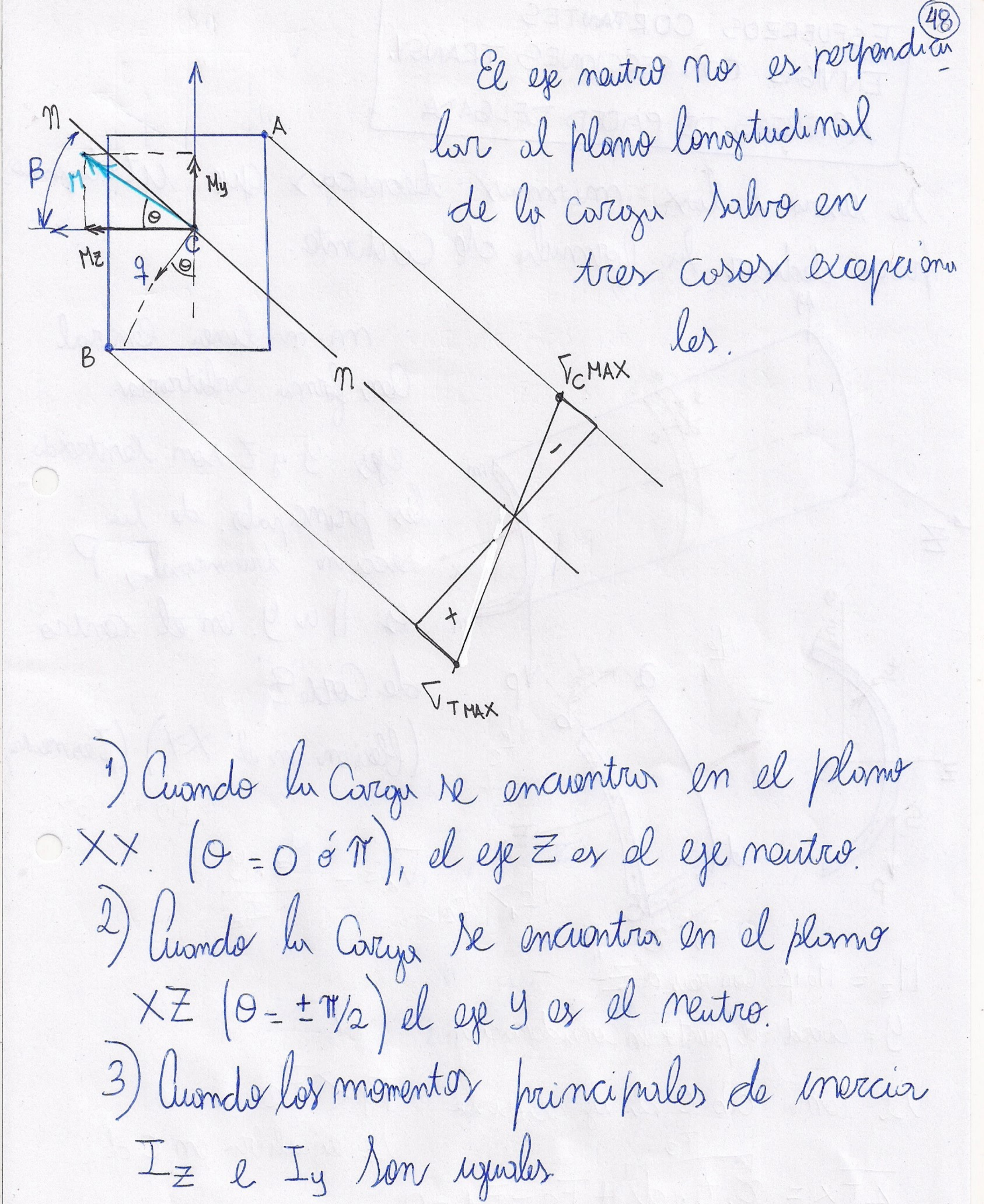
PRACTICAMENTE es robusta $\frac{l}{h} \leq 10$ para ser robusta.

VIGAS DOBLEMENTE SIMETRICAS CON CARGAS INCLINADAS

Vigas sometidas a cargas que no actuan en el plano de simetría, cargas inclinadas.

Se limita el ensayo a secciones doblemente simetricas además las cargas actuan en el centroide.


z
y
M
A
My
Z
Mz
σ de My y Mz se calcula a partir de la formula de flexión.
$\sigma_x = \frac{M_y \cdot Z}{I_y} - \frac{M_z \cdot y}{I_z}$
UNA COMPRESIÓN
UNA TRACCION
xy
yz
Mz
-
+
My
-
+
A
y
θ
Z
σc MAX
+
-
+
+
-
-
+
σT (MAX)
EJE NEUTRO
$\sigma_x = 0$
$\frac{M_y \cdot Z}{I_y} - \frac{M_z \cdot y}{I_z} = 0$
$\tan(\beta) = \frac{Y}{Z} = \frac{M_y \cdot I_z}{M_z \cdot I_y}$
$\tan\beta = \frac{M \cdot \operatorname{sen}\theta \cdot I_z}{M \cdot \cos\theta \cdot I_y}$
$\frac{M_y}{M_z} = \operatorname{Tg}(\theta)$
$\operatorname{Tg}(\beta) = \operatorname{Tg}(\theta) \frac{I_z}{I_y}$



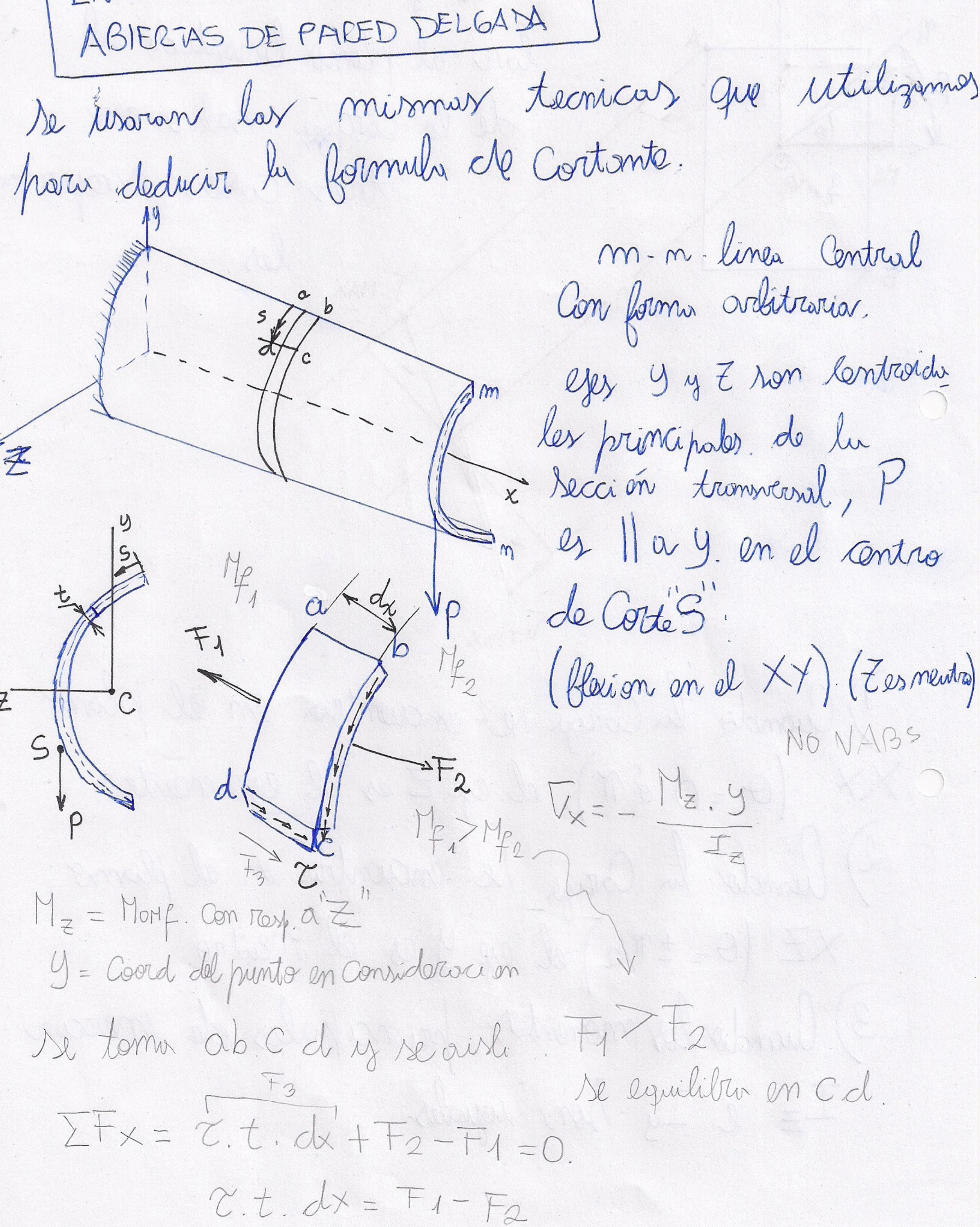
El eje neutro no es perpendicular al plano longitudinal de la carga salvo en tres casos excepcionales.

1) Cuando la carga se encuentra en el plano XX ($\theta = 0$ ó π), el eje Z es el eje neutro.

2) Cuando la carga se encuentra en el plano XZ ($\theta = \pm \pi/2$) el eje y es el neutro.

3) Cuando los momentos principales de inercia I_Z e I_y son iguales.

ESFUERZOS CORTANTES EN VIGAS CON SECCIONES TRANSV. ABIERTAS DE PARED DELGADA



Se usaran las mismas tecnicas que utilizamos para deducir la formula de Cortante.

m-n linea Central Con forma arbitraria.

ejes y y Z son centroida les principales de la sección transversal, P es ‖ a y. en el centro de Corte "S".

(flexion en el XY) (Z es neutro)

NO VABS

$$\sigma_x = -\frac{M_z \cdot y}{I_z}$$

M_z = Mom f. Con resp. a "Z"

y = Coord del punto en Consideracion

$F_1 > F_2$

Se toma ab c d y se aisla

Se equilibra en c d.

$$\sum F_x = \overbrace{\tau \cdot t \cdot dx}^{F_3} + F_2 - F_1 = 0.$$

$$\tau \cdot t \cdot dx = F_1 - F_2$$

$$F_1 = \int_0^S \sigma_x \, dA = \int_0^S -\frac{M_{z1} \cdot y}{I_z} \, dA = -\frac{M_{z1}}{I_z} \int_0^S y \, dA$$

$$\sigma_x = -\frac{M_{z1}}{I_z} y$$

$$F_2 = \int_0^S \sigma_x \, dA = -\frac{M_{z2}}{I_z} \int_0^S y \, dA$$

$$\sigma_x = \frac{-M_{z2}}{I_z} y$$

y es una coordenada para el elemento dA

$$\tau \cdot t \cdot dx = -\frac{M_{z1}}{I_z} \int_0^S y \, dA + \frac{M_{z2}}{I_z} \int_0^S y \, dA$$

$$\tau \cdot t \cdot dx = \int_0^S y \, dA \cdot \left(\frac{M_{z2}}{I_z} - \frac{M_{z1}}{I_z} \right)$$

es la razón de cambio $\frac{dM}{dx}$

$$\tau = \int_0^S y \, dA \cdot (M_{z2} - M_{z1}) \frac{1}{dx \, t \cdot I_z}$$

$$\frac{dM}{dx} = \frac{M_{z2} - M_{z1}}{dx} = V_y$$

$$\tau = \int_0^S y \, dA \cdot \underbrace{\left(\frac{M_{z2}}{dx} - \frac{M_{z1}}{dx} \right)}_{V_y} \cdot \frac{1}{I_z t}$$

$$\tau = \frac{V_y}{I_z t} \int_0^S y \, dA$$

$\int_0^S y \, dA$ → MOMENTO ESTATICO CON RESPECTO A "Z"

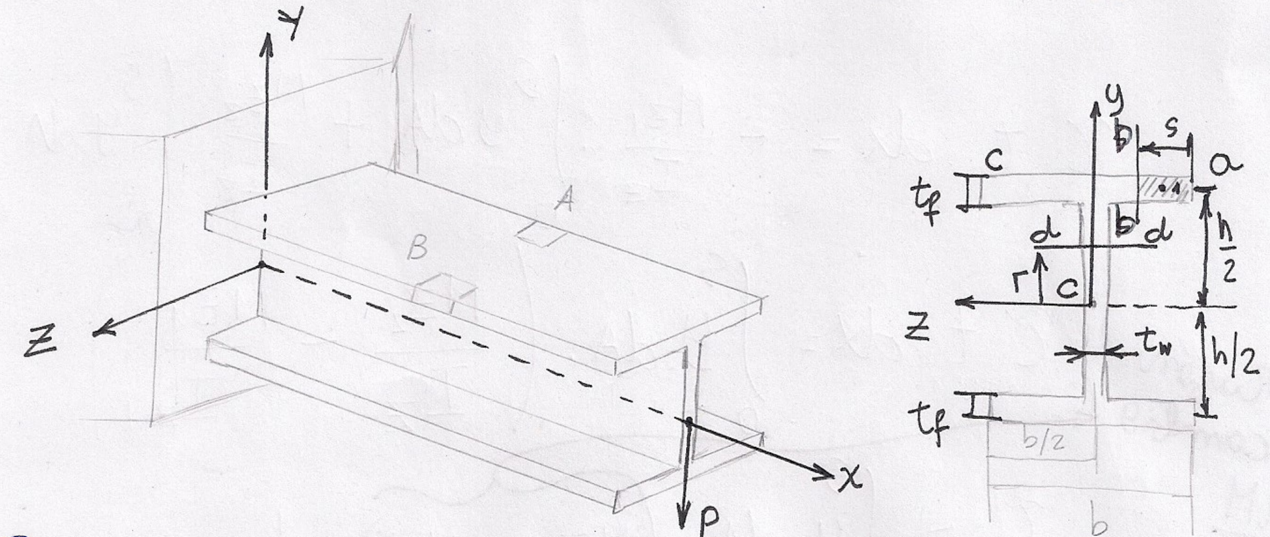
$$\boxed{\tau = \frac{V_y \cdot Q_z}{I_z t}}$$

Si $t.\tau = f = \dfrac{V_y . Q_z}{I_z}$

Si la carga actua paralela al eje z pos S se cambian los subindices "z" por "y", y viceversa

$$\tau = \frac{V_z . Q_y}{I_y . t} \qquad f = \frac{V_z . Q_y}{I_y}$$

ESFUERZOS CORTANTES EN VIGAS DE PATIN ANCHO.

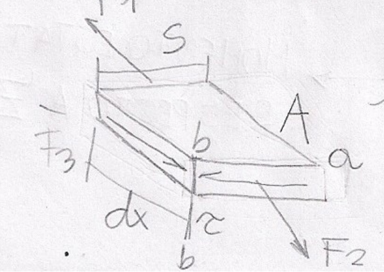


P esta en el centro del alma, en el centro de corte.

ESFUERZOS CORTANTES EN EL PATIN SUP.

$$Q_z = S . t_f . \frac{h}{2}$$

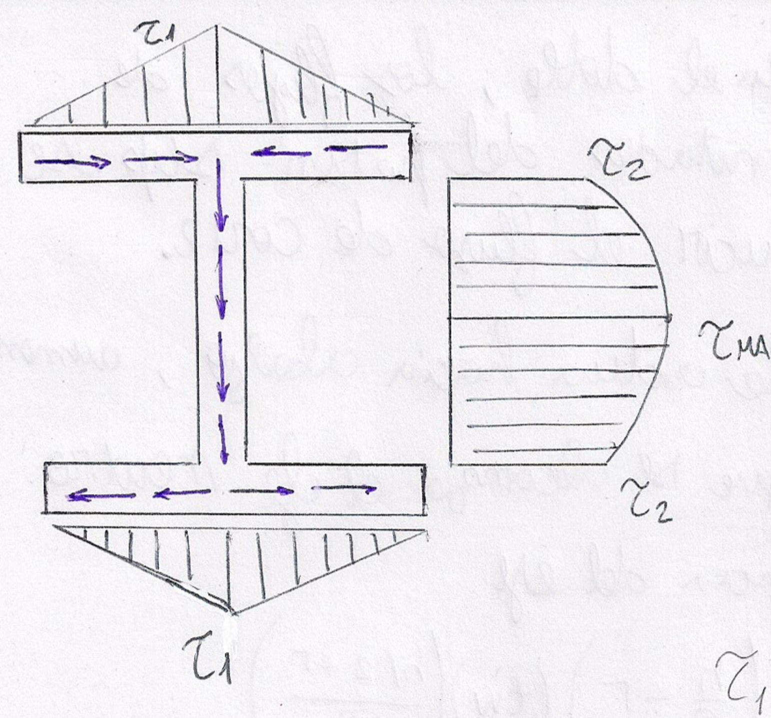
$$\tau_f = \frac{V_y . Q_z}{I_z . t} = \frac{P . (S . t_f . h/2)}{I_z . t_f} = \frac{P . S . h}{2 I_z}$$



elemento.

$F_1 > F_2$

Como es asi es necesario que VAYAN A LA IZQ.



$$\tau_1 \left(s = \frac{b}{2}\right) = \frac{b \cdot h \cdot P}{4 I_z}$$

es 0 en a $(s=0)$

es maximo en $\left(s = \frac{b}{2}\right)$

$$f_1 = \tau_1 \cdot t_f = \frac{b \cdot h \cdot P \cdot t_f}{4 I_z}$$

ESFUERZOS CORTANTES EN EL ALMA

Consideramos un corte horizontal en la parte superior del alma. (union entre patin y alma).

$$Q_z = b \cdot t_f \cdot \frac{h}{2}$$

$$\tau_2 = \frac{b \cdot h \cdot t_f \cdot P}{2 I_z \cdot t_w}$$

$$f_2 = \tau_2 \cdot t_w = \frac{b \cdot h \cdot t_f \cdot P}{2 I_z}$$

$$f_2 = 2 f_1$$

Es esperable que sea el doble, los flujos de corte de las dos mitades del patin sup. se combinan para producir el flujo de corte.

En el alma el corte actua hacia abajo, aumentando su magnitud hasta que se alcanza el eje neutro. En d-d a r distancia del eje.

$$Q_z = \frac{b.t.f.h}{2} + \left(\frac{h}{2} - r\right)(t_w)\left(\frac{h/2 + r}{2}\right)$$

$$= \frac{b.t_f.h}{2} + \frac{t_w}{2}\left(\frac{h^2}{4} - r^2\right)$$

$$\tau_w = \left(\frac{b.t_f.h}{t_w} + \frac{h^2}{4} - r^2\right)\frac{P}{2 I_z}$$

Con $r = \frac{h}{2}$ se reduce a τ_2

Con $r = 0 \rightarrow \tau_{MAX} = \left(\frac{b.t_f}{t_w} + \frac{h}{4}\right)\frac{P.h}{2 I_z}$

La variacion en el alma es parabolica, no es grande. RAZON τ_{MAX}/τ_2

$$\frac{\tau_{MAX}}{\tau_2} = 1 + \frac{h t_w}{4b.t_f}$$

La fuerza vertical R de los esfuerzos cortantes en el alma de la viga (los esfuerzos horizontales en los patines no producen resultante).

$dA = dr \cdot t_w$

$$R = \int \tau \cdot dA = 2 \int_0^{h/2} \tau \cdot t_w \cdot dr$$

DOS MITADES

$$R = 2 t_w \int_0^{\frac{h}{2}} \left(\frac{P}{2 I_z} \right) \left(\frac{b \cdot t_f \cdot h}{t_w} + \frac{h^2}{4} - r^2 \right) \cdot dr$$

$$R = \frac{P \cdot t_w}{I_z} \left[\int_0^{h/2} \frac{b \cdot t_f \cdot h}{t_w} \cdot dr + \int_0^{h/2} \frac{h^2}{4} \cdot dr - \int_0^{\frac{h}{2}} r^2 dr \right]$$

$$R = \frac{P \cdot t_w}{I_z} \left[\left(\frac{r \cdot b \cdot t_f \cdot h}{t_w} \right) \Bigg|_0^{\frac{h}{2}} + \left(\frac{h^2 \cdot r}{4} \right) \Bigg|_0^{h/2} - \left(\frac{r^3}{3} \right) \Bigg|_0^{h/2} \right]$$

$$R = \frac{P \cdot t_w}{I_z} \cdot \left(\frac{b \cdot t_f \cdot h^2}{2 t_w} + \frac{h^3}{8} - \frac{h^3}{24} \right)$$

$$R = \frac{P \cdot t_w}{I_z} \left(\frac{b \cdot t_f \cdot h^2}{2 t_w} + \frac{h^3}{12} \right)$$

$$\boxed{R = \frac{P}{I_z} \left(\frac{b \cdot t_f \cdot h^2}{2} + \frac{h^3 \cdot t_w}{12} \right)}$$

si reemplazo I nos queda R=P. Casi toda la resultante es sop. en el alma.

$$I_z = \frac{t_w \cdot h^3}{12} + \frac{2 \cdot b \cdot t_f \cdot h^2}{2^2} = \boxed{\frac{t_w \cdot h^3}{12} + \frac{b \cdot t_f \cdot h^2}{2}}$$

POR TEOREMA DE STAINER

Si despreciamos el espesor de las alas al ser sus espesores muy pequeños y estan encima elevados al cubo, (t_f^3) al sustituir I_z en la ecuacion R. Obtenemos que $R \simeq P$. Esto quiere decir que practicamente todo el esfuerzo de corte es soportado por el alma.

CENTRO DE CORTE EN SECCIONES ABIERTAS DE PARED DELGADA.

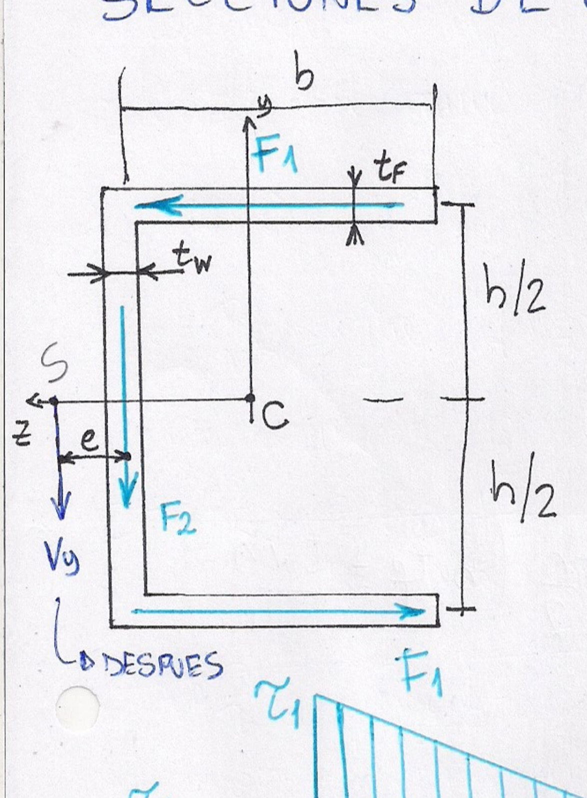
- Solo se consideran las vigas con secciones transversales con un eje de simetria o asimétricas. (el centro de corte en una viga doblemente simetrica esta en el centroide C).

El procedimiento consta de dos paso.

1°) evaluar los esfuerzos cortantes que actuan sobe la sección transversal cuando ocurre la flexión con respecto a uno de los ejes principales.

2do). Determinar la resultante de estos esfuerzos. El centro de corte se ubica en la linea de accion de la resultante. Si considero dos ejes principales, puedo det. su posicion.

SECCIONES DE CANAL.



- 1 eje de simetría. Z. el Centro C. Se ubica sobre el eje.
- Supongo flexión sobre Z. (eje N), determinamos $V_y \parallel$ "y"

determinamos τ_1 en el patín, τ_2 en el alma (SUP) y τ_{MAX}.

$$Q_z = b \cdot t_f \cdot \frac{h}{2}$$

$$\tau_1 = \frac{V_y \cdot Q_z}{I_z \cdot t_f} = \frac{V_y \cdot b \cdot t_f \cdot \frac{h}{2}}{I_z \cdot t_f}$$

$$\boxed{\tau_1 = \frac{V_y \cdot b \cdot h}{2\, I_z}}$$

τ_2 en la parte superior del alma se obtiene de forma similar. t_f cambia por t_w

$$Q = b \cdot t_f \cdot \frac{h}{2}$$

$$\tau_2 = \frac{V_y \cdot b \cdot t_f}{I_z \cdot t_w} \cdot \frac{h}{2} = \boxed{\frac{V_y \cdot b \cdot t_f \cdot h}{2 \cdot I_z \cdot t_w}}$$

Q_Z en el eje neutro.

$$Q_Z = b \cdot t_f \frac{h}{2} + \frac{h}{2} \cdot t_w \cdot \left(\frac{h}{4}\right)$$

$$Q_Z = \frac{h}{2}\left(b \cdot t_f + \frac{t_w \cdot h}{4}\right)$$

$$\tau_{MAX} = \frac{V_y \cdot Q_z}{I_z \cdot t_w} = \frac{V_y}{I_z \; t_w} \cdot \frac{h}{2}\left(b \cdot t_f + \frac{t_w \cdot h}{4}\right)$$

$$\boxed{\tau_{MAX} = \left(\frac{b \cdot t_f}{t_w} + \frac{h}{4}\right)\frac{h \cdot V_y}{2 I_z}}$$

Las fuerzas en los patines (F1) se encuentra obteniendo el area del triangulo de esfuerzo multiplicado por el espesor.

$$F_1 = \left(\frac{\tau_1 \cdot b}{2}\right)(t_f) = \frac{h \cdot b^2 \cdot t_f \cdot V_y}{4 I_z}$$

$F_2 = V_y$ (los patines no influyen)

F_2 la determino calculando el area

$$A = \tau_2 \cdot h + \frac{2}{3}\left(\tau_{MAX} - \tau_2\right) \cdot h$$

$$F_2 = \tau_2 \cdot h \cdot t_w + \frac{2}{3} \cdot \left(\tau_{MAX} - \tau_2\right) h \cdot t_w$$

Substituyo para τ_2 y τ_{MAX} $\rightarrow I_z = \frac{t_w h^3}{12} + \frac{b \cdot h^2 \cdot t_f}{2}$

$$F_2 = \left(\frac{t_w \cdot h^3}{12} + \frac{b \cdot h^2 \cdot t_f}{2} \right) \frac{V_y}{I_z}$$

$$\Sigma M_S = F_1 \cdot h - F_2 \cdot e = 0$$

$$F_1 \cdot h = F_2 \cdot e$$

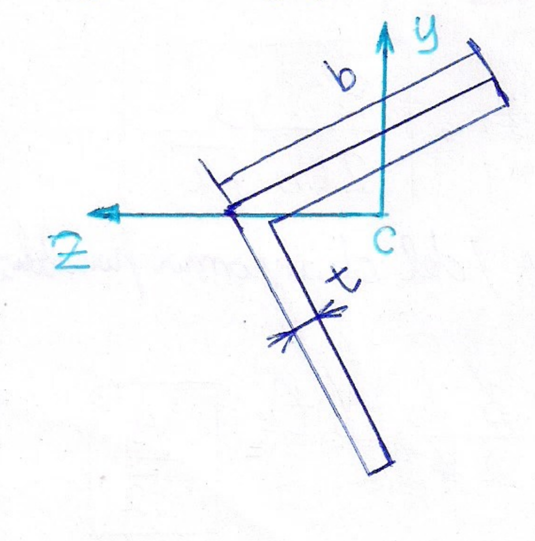
$$e = \frac{F_1 h}{F_2}$$

$$e = \frac{b^2 \cdot h^2 \cdot t_f}{4 I_z}$$

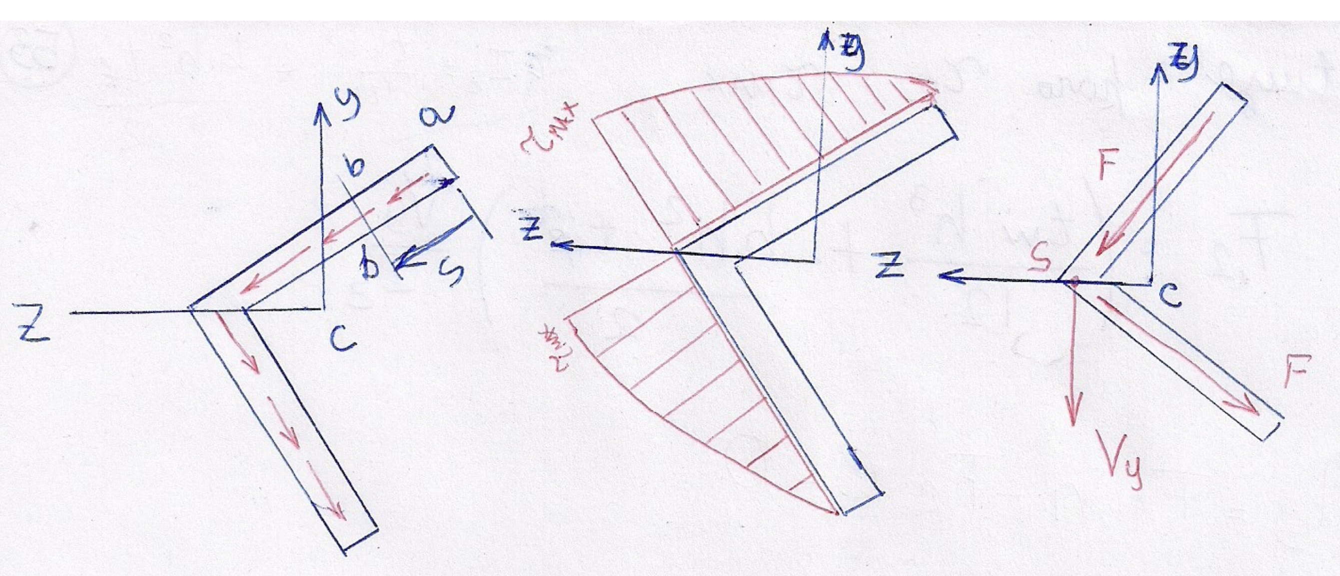
POSICIÓN DEL CENTRO DE CORTE

$$\boxed{e = \frac{3 b^2 t_f}{h \cdot t_w + 6 b t_f}}$$

SECCIÓN DE ÁNGULO.



Se considera una sección en ángulo con lados iguales. Cada lado mide b y tiene espesor t; el eje Z es de simetría. El origen se ubica en el centroide C; el eje "y" y "Z" son ejes centroidales principales



Se siguen los pasos anteriores. Se supone que esta sometida a $V_y \parallel y$

$$Q = A \cdot d = (s \cdot t) \cdot \left(\frac{b - s/2}{\sqrt{2}} \right)$$

Substituyo

$$\tau = \frac{V_y \cdot Q_z}{I_z \cdot t} = \frac{V_y \cdot s}{I_z \cdot \sqrt{2}} \left(b - \frac{s}{2} \right)$$

$$I_z = 2\left(\frac{t \cdot b^3}{6}\right) = \frac{tb^3}{3}$$

Sale de tabla.

$$\tau = \frac{V_y \cdot S}{\frac{t \cdot b^3}{3} \sqrt{2}} \left(b - \frac{s}{2} \right) = \boxed{\frac{3 V_y \cdot S}{b^3 \cdot t \sqrt{2}} \left(b - \frac{s}{2} \right)}$$

el esfuerzo cortante a lo largo del angulo, varía cuadraticamente con S.

τ_{MAX} es con $S = b$

$$\tau_{MAX} = \frac{3 V_y \cdot b}{b^3 \cdot t \sqrt{2}} \left(b - \frac{b}{2} \right)$$

$$\tau_{MAX} = \frac{3 V_y}{b^2 t \sqrt{2}} \left(\frac{b}{2} \right) = \boxed{\frac{3 \cdot V_y}{2 \cdot t \cdot b \cdot \sqrt{2}}}$$

La fuerza F en cada lado es igual al area del diagrama parabolico multiplicado por el espesor

$$F = \frac{2}{3} (\tau_{MAX} \cdot b) \cdot t = \frac{2}{3} \frac{3 V_y}{2 b t \sqrt{2}} b \, t = \boxed{\frac{V_y}{\sqrt{2}}}$$

Solo sobrevive las componentes verticales, cada componente vale $F/\sqrt{2}$ o $V_y/2$; la resultante vertical es igual a la fuerza cortante V_y. La fuerza resultante pasa por el punto de intersección de las líneas de acción de dos fuerzas F. En la unión de los dos lados del ángulo se ubicará el centro de cortante. (53')

MECANICA DE LAS ESTRUCTURAS 2da PARTE

Es fundamental no confundir a los esfuerzos con vectores. (se usan flechas para su representación pero no se pueden adicionar con el principio del paralelogramo).

En matematica se denominan TENSORES. (otros tensores en mecanica son las deformaciones y los momentos de inercia).

UNIDAD VI

ESFUERZO PLANO Ó ESTADO PLANO. (7.2)

El análisis de barras en tracción, compresión, ejes en torsión y vigas en flexión; son ejemplos de el llamado esfuerzo plano.

Consideremos un elemento de esfuerzo infinitesimal:

Cuando el material esta en esfuerzo plano, en el plano XY, solo las caras "X" e "Y" están sometidas a esfuerzos y todos actuan paralelos a los ejes XY.

Si el elemento esta en la superficie libre de un cuerpo, el eje Z es normal a la superficie y la cara Z esta en el plano de la superficie.

σ: ESFUERZO NORMAL (sobre x, σ_x y sobre y, σ_y) son iguales y opuestos, por ser elemento infinitesimal

TRACCIÓN POSITIVA Y COMPRESIÓN NEGATIVA.

τ tiene dos subíndices, el primero denota la cara sobre la cual actua, y el segundo en la dirección.

Ej: τ_{xy}; actua sobre la cara "x" y en la dirección del eje "y".

El τ es positivo, cuando actua sobre una cara positiva, y en la dirección positiva de un eje.

"Un esfuerzo τ es positivo cuando las direcciones asociadas a sus subíndices son (mas-mas) o menos-menos es negativo cuando son mas-menos y menos-mas."

son iguales por reciprocidad

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

es mejor a veces visualizarlo como un elemento plano de esfuerzo. (elemento bidimensional).

y, σ_y, τ_{yx}, τ_{xy}, 0, σ_x, x

el elemento sin embargo sigue siendo un cuerpo solido con espesor perpendicular al plano de la figura.

al no tener esfuerzos sobre Z se puede dibujar de manera bidimencional.

ESFUERZOS SOBRE SECC. INCLINADAS

Conociendo σ_x, σ_y y τ_{xy} podemos conocer los esfuerzos sobre planos inclinados.

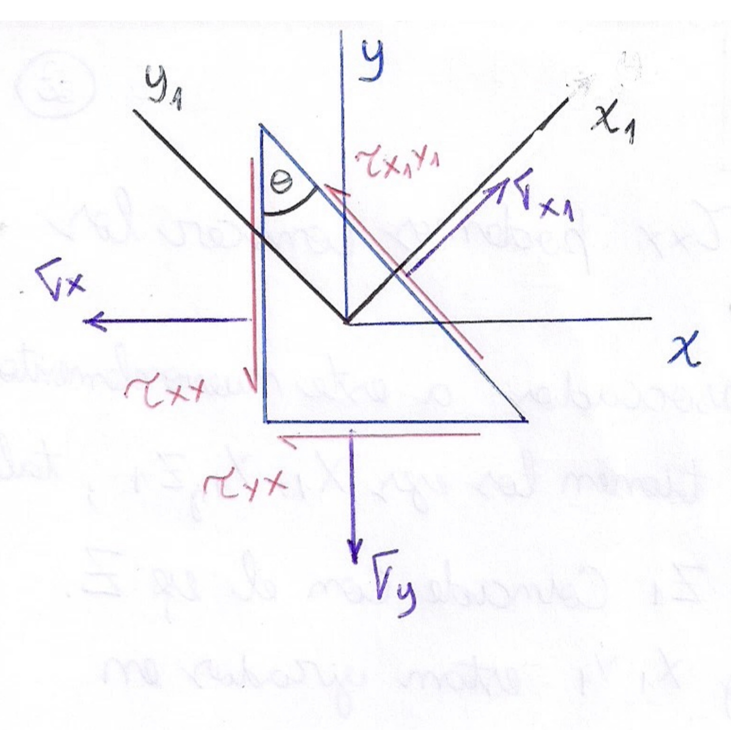
asociados a este nuevo elemento se tienen los ejes X_1, Y_1, Z_1, tales que Z_1 coincide con el eje Z. y $X_1 Y_1$ estan girados en sentido contrario a las agujas del reloj un angulo θ. Con respecto a XY.

los nuevos esfuerzos se denotan como σ_{x_1}, σ_{y_1} y $\tau_{x_1 y_1}$

$\tau_{x_1 y_1} = \tau_{y_1 x_1}$ Los esfuerzos cortantes que actuan sobre los cuatro lados de un elemento en esfuerzo plano se conocen si determinamos el esfuerzo cortante que actua sobre cualquiera de los lados.

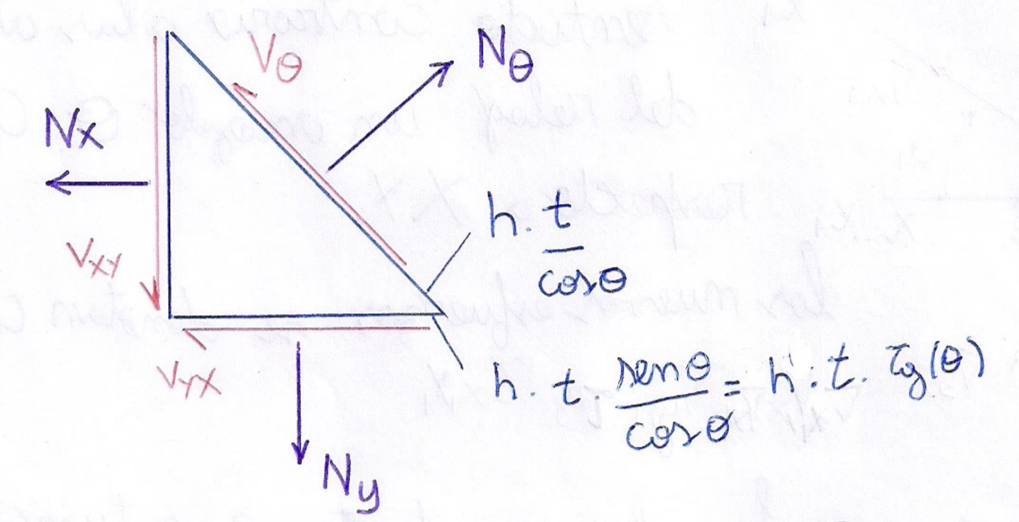
Se toma un elemento de esfuerzo en forma de cuña. Se busca la relacion entre los XY y $X_1 Y_1$.

Se plantean ec. de equilibrio para la cuña.



para transformar los esfuerzos en fuerzas los multiplico por sus areas

"espesor t y altura h"



$h \cdot t \cdot \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = h \cdot t \cdot \operatorname{tg}(\theta)$

$N_x = \sigma_x \cdot h \cdot t$

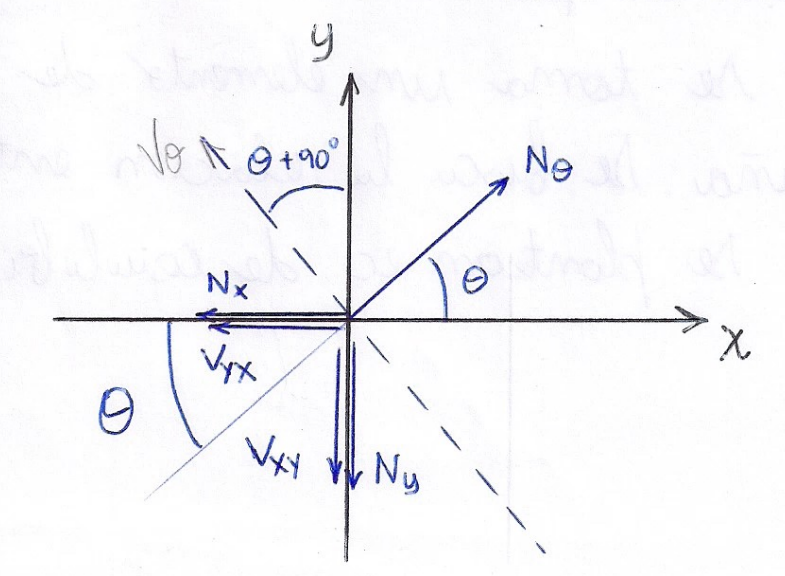
$V_{xy} = h \cdot t \; \tau_{xy}$

$V_{yx} = \tau_{yx} \cdot h \cdot t \cdot \operatorname{tg}\theta$

$N_y = \sigma_y \cdot h \cdot t \cdot \operatorname{tg}\theta$

$N_\theta = \sigma_\theta \cdot \frac{h \cdot t}{\cos\theta}$

$V_\theta = \tau_\theta \cdot \frac{h \cdot t}{\cos\theta}$



$$\Sigma F y_1 = -\sigma_y \cdot h \cdot t \cdot tg\theta \cdot \cos\theta + \tau_{xx} \cdot h \cdot t \cdot tg\theta \cdot \operatorname{sen}\theta = 0$$

⋮

$$\tau_\otimes = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \operatorname{sen} 2\theta + \tau_{xy} \cdot \cos 2\theta$$

EQ. DE TRANSFORMACIÓN

$$\sigma_{x_1} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \cdot \operatorname{sen} 2\theta$$

$$\sigma_{y_1} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \operatorname{sen} 2\theta$$

$$\tau_{x_1 y_1} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \operatorname{sen} 2\theta + \tau_{xy} \cdot \cos 2\theta$$

$$\sigma_{x_1} + \sigma_{y_1} = \sigma_x + \sigma_y$$

INVARIANTE DE TENSIONES

CIRCULO DE MOHR

1)

$$\sigma_{x_1} - \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right) = \overbrace{\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta}^{a} + \overbrace{\tau_{xy} \cdot \operatorname{sen} 2\theta}^{b}$$

$$\tau_{x_1 y_1} = \overbrace{-\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \operatorname{sen} 2\theta}^{a} + \overbrace{\tau_{xy} \cos 2\theta}^{b}$$

ELEVO AL CUADRADO

$$\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \sigma_{PROM} \quad ; \quad R^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2$$

2)

$$\left(\sigma_{x_1} - \sigma_{PROM}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 \cdot \cos^2\theta + 2a.b + \tau_{xy}^2 \cdot \operatorname{sen}^2 2\theta$$

$$\tau_{x_1 y_1}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 \operatorname{sen}^2 2\theta - 2ab + \tau_{xy}^2 \cos^2 2\theta$$

3)

$$\left(\sigma_{x_1} - \sigma_{PROM}\right)^2 + \tau_{x_1 y_1}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 \left(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta\right) + \tau_{xy}^2 \left(\operatorname{sen}^2 2\theta + \cos^2 2\theta\right)$$

$$\left(\sigma_{x_1} - \sigma_{PROM}\right)^2 + \tau_{x_1 y_1}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2$$

$$\boxed{\left(\sigma_{x_1} - \sigma_{PROM}\right)^2 + \tau_{x_1 y_1}^2 = R^2}$$

CIRCULO DE MOHR (7.4)

Representación gráfica de las ecuaciones de transf., es muy util ya que permite visualizar las relaciones entre los esfuerzos normales y cortantes que actuan sobre varios planos inclinados en un punto de un cuerpo sometido a esfuerzos. Proporciona tambien medios para calcular esfuerzos principales, esfuerzos cortantes maximos y esfuerzos sobre planos inclinados.

ECUACIONES DE MOHR

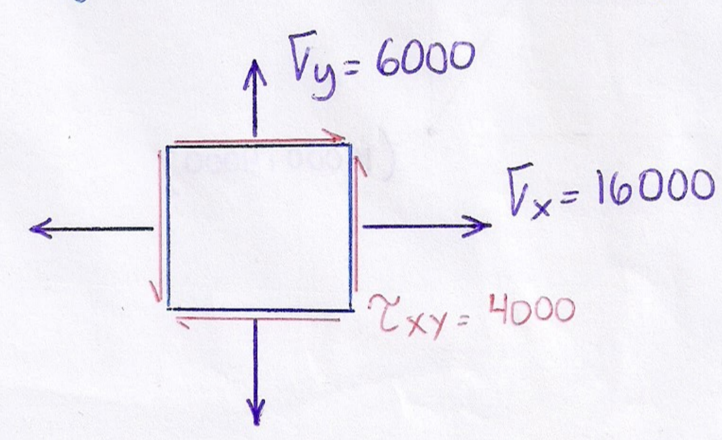
Son las de transformación!

las podemos sumar

$$C = \sigma_{PROM} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \;;\; R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_{1,2} = C \pm R$$

Ej: Trazar el CÍRCULO DE MOHR



1°) Saco pares ordenados de la Cara de Referencia

$X = (16000 ; 4000)$

$Y = (6000 ; -4000)$

SIEMPRE DE SIGNOS CAMBIADOS

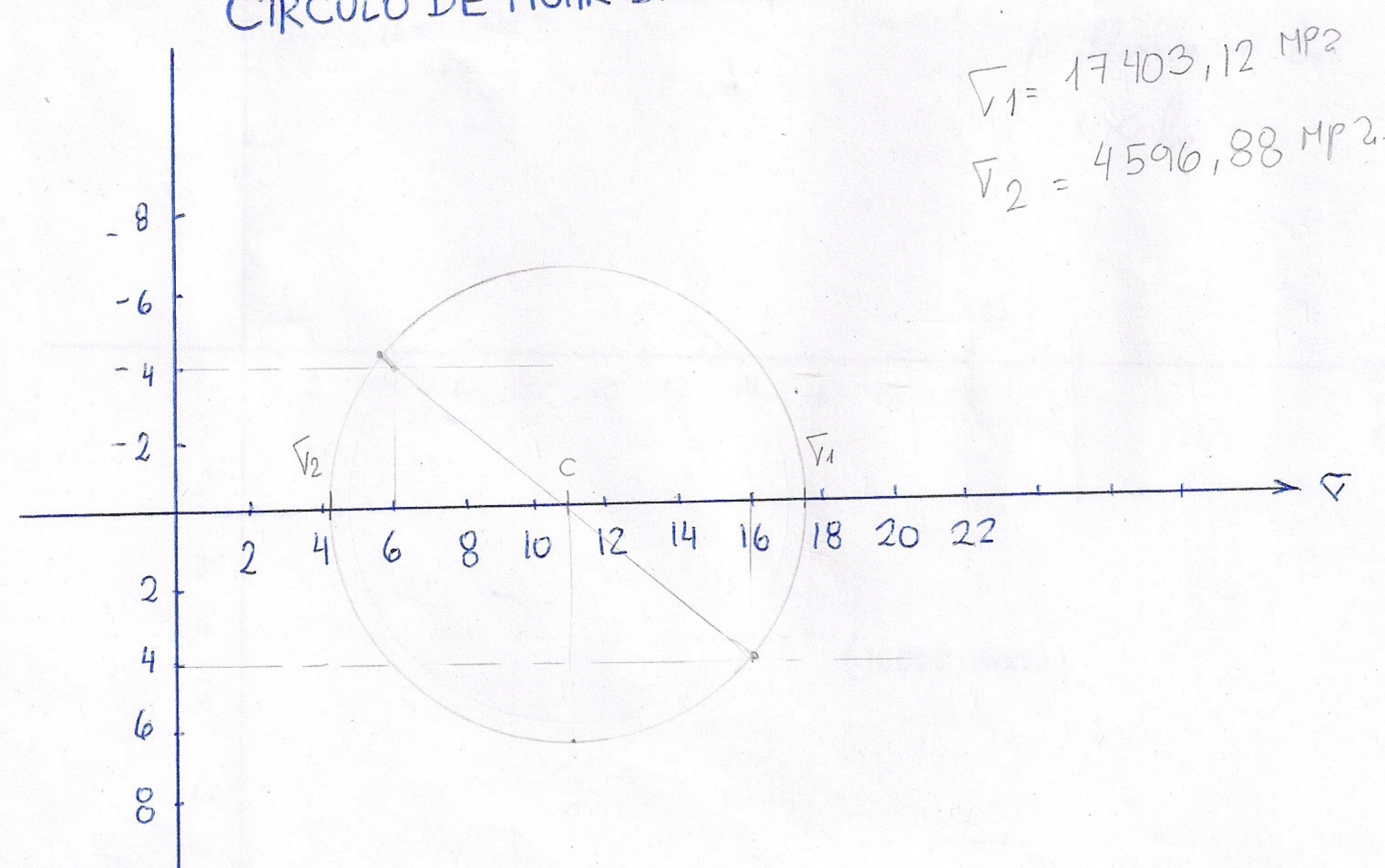
2) CALCULO C y R

$$C = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{6000 + 16000}{2} = 11000$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xx}^2} = 6403,124$$

3) TRAZO

CIRCULO DE MOHR DEL ELEMENTO.

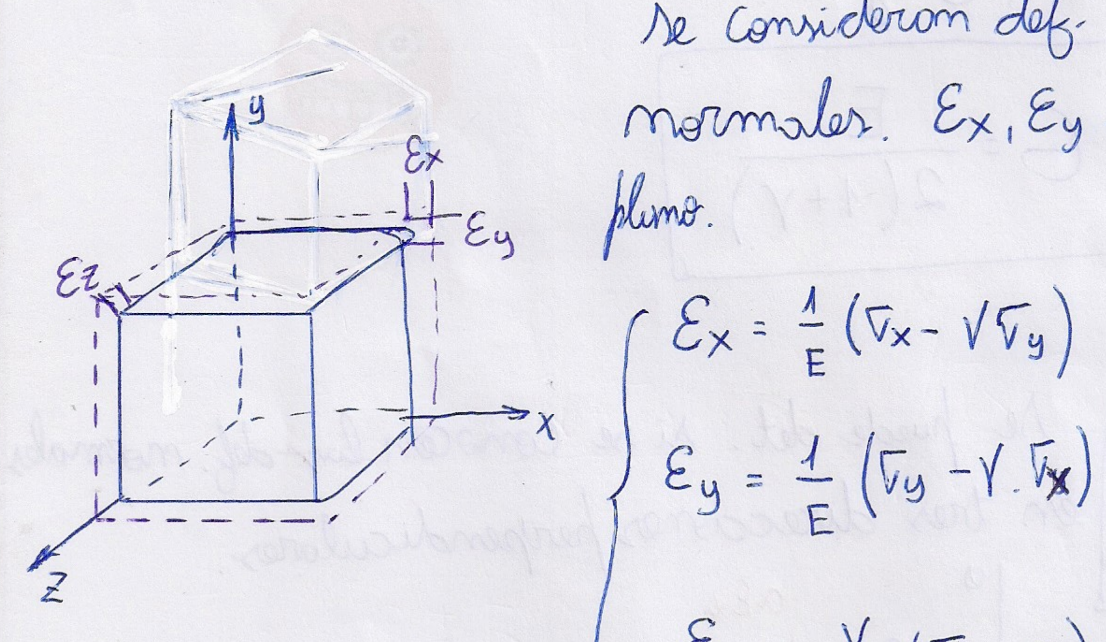


7.5. LEY DE HOOKE PARA ESF. PLANO.

El analisis se limitará a materiales que Cumplan dos condiciones importantes.

1ª: el material es uniforme en todo el Cuerpo y tiene las mismas propiedades en todas las direcciones (MATERIAL HOMOGENEO E ISÓTROPO)

2ª: el material sigue la ley de HOOKE, es un material linealmente elástico.



se consideran def. unitarias normales. $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ y ε_z en esfuerzo plano.

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu \cdot \sigma_x) \\ \varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \end{cases}$$

τ_{xy} Causa una distorsion y la Cara Z se Convierte en un rombo.

- $\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$ Deformación por cortantes, es el decremento en el angulo entre las caras x e y.

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x)$$

$$\tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy}$$

estas 3 mas las 3 anteriores se conocen como Ley de HOOKE para esfuerzo plano

el $\boxed{\sigma_z = 0}$

la relación entre ν, G y E

$$\boxed{G = \frac{E}{2(1+\nu)}}$$

CAMBIO DE VOLUMEN UNITARIO

Se puede det. si se conocen las def. normales en tres direcciones perpendiculares.

Las deformaciones ε_x, ε_y y ε_z producen cambios en las dimensiones que se muestran en las lineas discontinuas.

sus incrementos $a\varepsilon_x$, $b\varepsilon_y$ y $c\varepsilon_z$

V_0 es el volumen original del elemento.

$$V_0 = a.b.C$$

el volumen final es $V_1 = (a + a\,\varepsilon_x)(b + b.\varepsilon_y)(c + c.\varepsilon_z)$

$$= abC(1+\varepsilon_x)(1+\varepsilon_y)(1+\varepsilon_z)$$

$$V_1 = V_0(1+\varepsilon_x)(1+\varepsilon_y)(1+\varepsilon_z)$$

TERMINOS ENTRE DEF se omiten

SON DESPRECIABLES.

$$V_1 = V_0(1+\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z)$$ ← expresión final

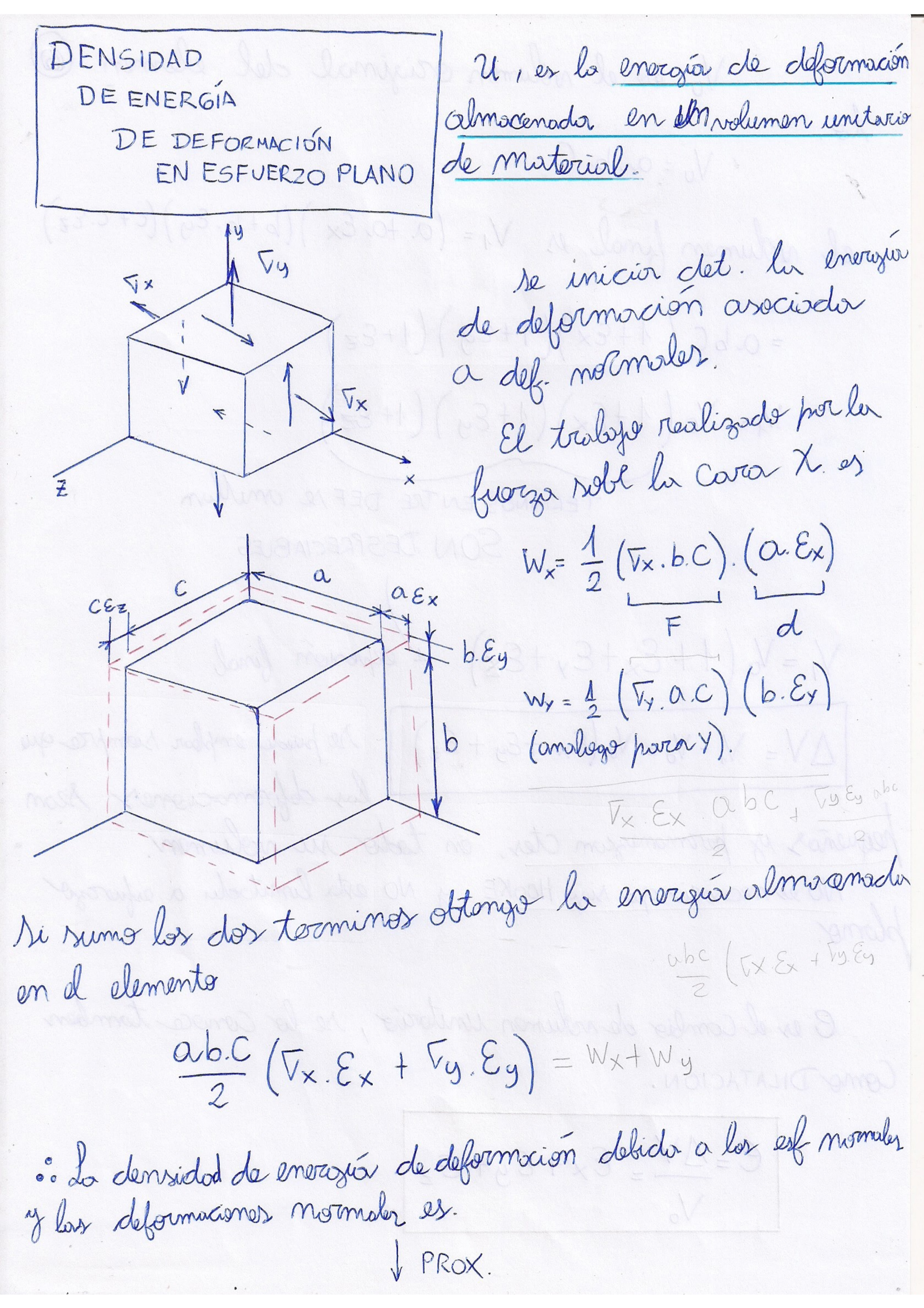
$$\boxed{\Delta V = V_1 - V_0 = V_0(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)}$$

se puede emplear siempre que las deformaciones sean pequeños y permanezcan ctes. en todo su volumen.

NO es necesario que siga HOOKE y NO esta limitada a esfuerzo plano.

e es el cambio de volumen unitario, se lo conoce tambien como DILATACIÓN.

$$\boxed{e = \frac{\Delta V}{V_0} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}$$



DENSIDAD DE ENERGÍA DE DEFORMACIÓN EN ESFUERZO PLANO

U, es la energía de deformación almacenada en un volumen unitario de material.

se inicia det. la energía de deformación asociada a def. normales.

El trabajo realizado por la fuerza sobre la cara X es

$$W_x = \frac{1}{2}\underbrace{(\sigma_x . b . c)}_{F} . \underbrace{(a . \varepsilon_x)}_{d}$$

$$W_y = \frac{1}{2}(\sigma_y . a . c)(b . \varepsilon_y)$$

(analogo para Y).

Si sumo los dos terminos obtengo la energía almacenada en el elemento

$$\frac{a.b.c}{2}(\sigma_x . \varepsilon_x + \sigma_y . \varepsilon_y) = W_x + W_y$$

∴ La densidad de energía de deformación debido a los esf normales y las deformaciones normales es.

↓ PROX.

$$u_1 = \frac{1}{2}\left(\sigma_x \cdot \varepsilon_x + \sigma_y \cdot \varepsilon_y\right) \quad \frac{E}{V} = \frac{1}{a.b.c}$$

se simplifica

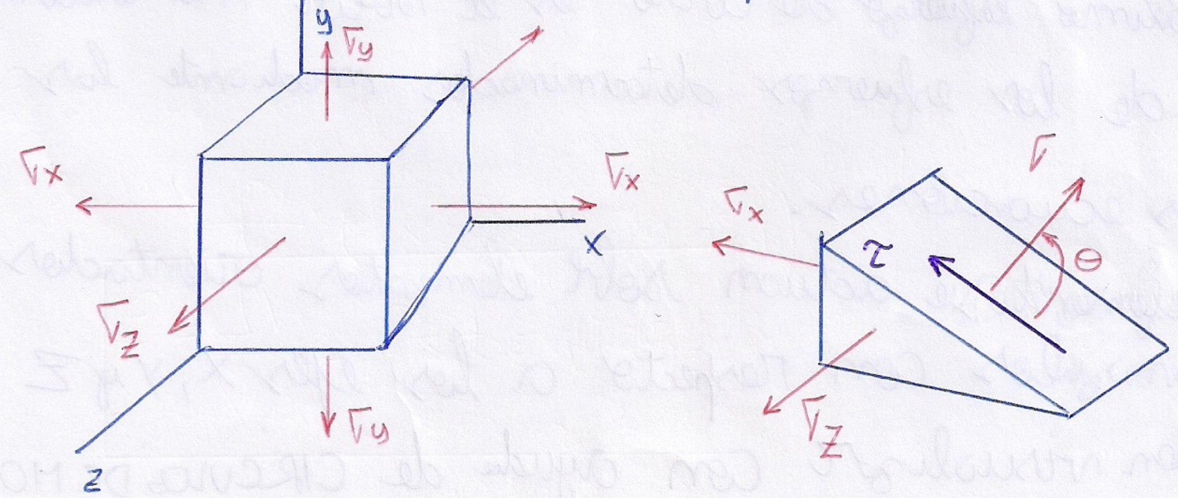
La densidad de energía asociada a las def. por Cortante se evalua antes

$$u_2 = \frac{\tau_{xy} \cdot \gamma_{xy}}{2}$$

Si se combinan las expresiones, se obtiene la expresión para la DENSIDAD DE ENERGÍA DE DEFORMACIÓN EN ESFUERZO PLANO:

$$\boxed{u = \frac{1}{2}\left(\sigma_x \cdot \varepsilon_x + \sigma_y \cdot \varepsilon_y + \tau_{xy} \cdot \gamma_{xy}\right)}$$

ESFUERZO TRIAXIAL 7.6 Un material sometido a esfuerzos normales σ_x, σ_y y σ_z que actuan en tres direcciones mutuamente perpendiculares se dice que se encuentra en un estado de esfuerzo triaxial. NO HAY esfuerzos de Corte sobre las caras; σ_x, σ_y y σ_z son principales



los esfuerzos que aparecen en o sobre la cara cortada son análogos a σ_{x_1} y $\tau_{x_1 y_1}$.

σ y τ se det. a partir de ecuaciones de equilibrio de fuerzas en el plano XY, son independientes de σ_Z.

Vale lo visto (CIRCULO MOHR Y EQ. DE TRANSF) para det. los σ y τ en esfuerzo triaxial.

ESFUERZO CORTANTE MAXIMO ocurren en planos orientados a 45° con respecto a los planos principales.

En triaxial los esfuerzos cortantes máximos ocurren sobre elementos orientados a 45° con respecto a los ejes X, Y y Z.

$$\left(\tau_{MAX}\right)_Z = \pm \frac{\sigma_X - \sigma_Y}{2}$$

$$\left(\tau_{MAX}\right)_X = \pm \frac{\sigma_Y - \sigma_Z}{2}$$

$$\left(\tau_{MAX}\right)_Y = \pm \frac{\sigma_X - \sigma_Z}{2}$$

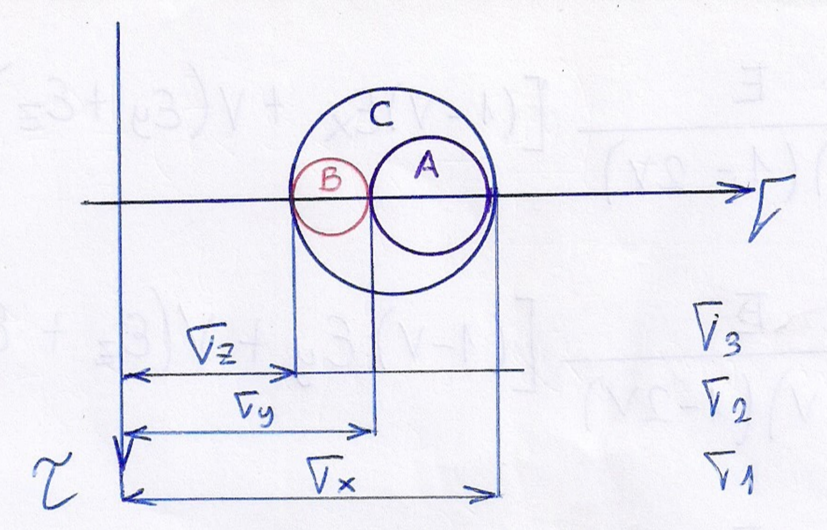
$$\frac{\text{abs.} - \text{ORD.}}{2}$$

Z

X Y

El máximo esfuerzo de corte es el valor numéricamente mayor de los esfuerzos determinados mediante las anteriores ecuaciones.

Los esfuerzos que actúan sobre elementos orientados a varios ángulos con respecto a los ejes X, Y y Z se pueden visualizar con ayuda de CIRCULOS DE MOHR



Elementos orientados por rotaciones con respecto a Z, corresponde el circulo A. ($\sigma_x > \sigma_y$; tracción).

Se trazan de manera similar B y C, para elementos orientados con rotaciones con respecto a X y Y, respectivamente.

$\tau_{MAX} = R_C$ (osea circulo MAYOR)

Los esfuerzos normales que actuan sobre los planos de esfuerzos cortantes máximos tienen magnitudes dadas por las abscisas de los centros de los circulos respectivos.

LEY DE HOOKE PARA ESFUERZO TRIAXIAL

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_z)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_z + \sigma_x)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)$$

DEFORMACIONES POR ESFUERZO TRIAXIAL.

$$\sigma_x = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_x + \nu(\varepsilon_y + \varepsilon_z)\right]$$

$$\sigma_y = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_y + \nu(\varepsilon_z + \varepsilon_x)\right]$$

$$\sigma_z = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_z + \nu(\varepsilon_x + \varepsilon_y)\right]$$

Las 6 ecuaciones representan la Ley de HOOKE para esfuerzo triaxial.

CAMBIO DE VOLUMEN el cambio de volumen o dilatación para un elemento en esfuerzo triaxial se obtiene de la misma manera que para esfuerzo plano.

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

(VALIDA para cualquier material solo que con deformaciones pequeñas)

$$e = \frac{1-2\nu}{E}\left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z\right)$$

Solo si el material sigue la Ley de HOOKE.

DENSIDAD DE ENERGIA DE DEFORMACIÓN

Se obtiene de la misma manera que para esfuerzo plano. Cuando σ_x y σ_y actuan solos, la densidad de en. por def:

$$u = \frac{1}{2}(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y)$$

en esfuerzo triaxial, se somete a σ_x, σ_y y σ_z la expresión queda de la siguiente forma.

$$u = \frac{1}{2}(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \cdot \varepsilon_z)$$

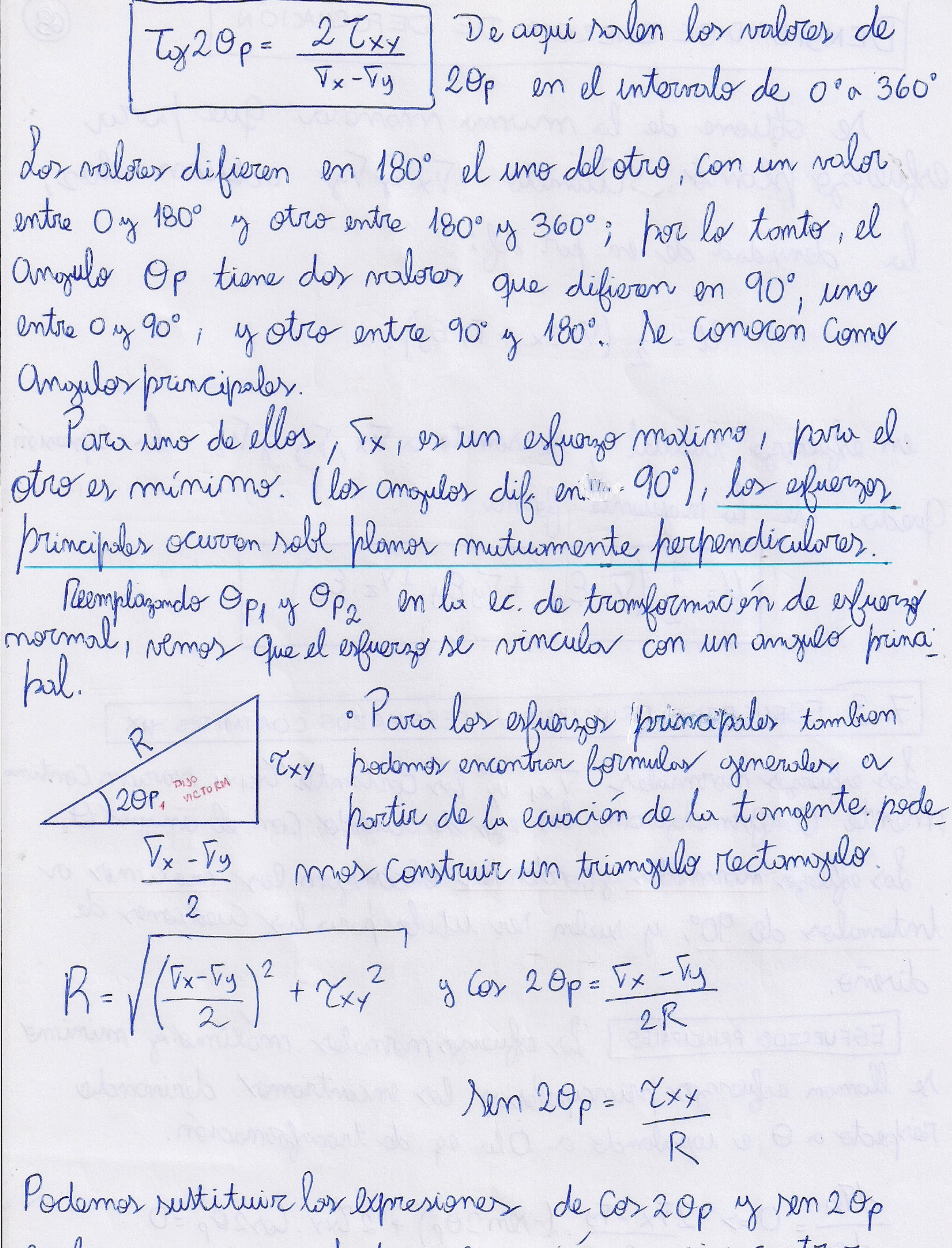
7.3 ESFUERZOS PRINCIPALES Y ESFUERZOS CORTANTES MAX

Los esfuerzos normales σ_{x1} y los cortantes τ_{x1y1} varian continuamente conforme giran los ejes de acuerdo con el angulo θ.

Los esfuerzos normales y cortantes alcanzan los maximos a intervalos de 90°, y suelen ser utiles para las cuestiones de diseño.

ESFUERZOS PRINCIPALES Los esfuerzos normales máximo y minimo se llaman esfuerzos principales, y los encontramos derivando respecto a θ e igualando a 0 la eq. de transformación.

$$\frac{d\sigma_{x1}}{d\theta} = 0 \Rightarrow 2\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot (-\operatorname{sen} 2\theta_p) + 2\tau_{xy} \cdot \cos 2\theta_p = 0$$



$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

De aquí salen los valores de $2\theta_p$ en el intervalo de 0° a 360°

Los valores difieren en 180° el uno del otro, con un valor entre 0 y 180° y otro entre 180° y 360°; por lo tanto, el ángulo θ_p tiene dos valores que difieren en 90°, uno entre 0 y 90°, y otro entre 90° y 180°. Se conocen como ángulos principales.

Para uno de ellos, σ_x, es un esfuerzo máximo, para el otro es mínimo. (los ángulos dif. en 90°), **los esfuerzos principales ocurren sobre planos mutuamente perpendiculares.**

Reemplazando θ_{p_1} y θ_{p_2} en la ec. de transformación de esfuerzo normal, vemos que el esfuerzo se vincula con un ángulo principal.

• Para los esfuerzos principales también podemos encontrar fórmulas generales a partir de la ecuación de la tangente podemos construir un triángulo rectángulo.

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad \text{y} \quad \cos 2\theta_p = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2R}$$

$$\operatorname{sen} 2\theta_p = \frac{\tau_{xy}}{R}$$

Podemos sustituir las expresiones de $\cos 2\theta_p$ y $\operatorname{sen} 2\theta_p$ en las ecuaciones de transformación y así encontrar ecuaciones generales para estados principales.

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

- Si igualamos a 0 el esfuerzo cortante $\tau_{x_1 y_1}$, obtenemos la misma ecuación del angulo θ_P, los angulos sobe planos cortantes cero son los mismos que para planos principales. → Los esfuerzos cortantes son cero sobe los planos principales.
- Para esfuerzo uniaxial y biaxial los planos X e Y ya son planos principales. $Tg(2\theta_P) = 0$. y los valores principales θ_P son 0° y 90°. Los cortantes son cero en esos planos.
- Para un elemento en cortante puro los planos principales estan a 45°. los θ_P son 45° y 135°. τ_{xy} es ⊕ ; $\sigma_1 = \tau_{xy}$, $\sigma_2 = -\tau_{xy}$
- No debemos olvidar que el elemento de esfuerzo es tridimensional y que tiene tres esfuerzos principales en acción sobe tres planos mutuamente perpendiculares. $\sigma_1 > \sigma_2$ (def). y σ_3 puede ser menor o mayor, en esfuerzo plano $\sigma_3 = 0$.

ESFUERZOS CORTANTES MAXIMOS

Se deriva con respecto a θ la ecuacion de $\tau_{x_1 y_1}$, llamaremos θ_S al angulo.

$$\frac{d\tau_{x_1 y_1}}{d\theta} = 0 \Longrightarrow \boxed{Tg\, 2\theta_S = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}}$$

un valor entre 0 y 90 y otro entre 90 y 180

Los esf. cortantes maximos ocurren sobe planos perpendiculares, difieren solo en el signo, ambos en modulo valen igual.

Comparando θ_S y θ_P (sus eq).

$$Tg 2\theta_S = -\frac{1}{Tg 2\theta_P}$$

Los esf. cortantes maximos ocurren a 45° respecto a los planos principales

$$\frac{sen 2\theta_S}{cos 2\theta_S} + \frac{cos 2\theta_P}{sen 2\theta_P} = 0 \Rightarrow \boxed{\theta_S = \theta_P \pm 45°}$$

$$\theta_{S_1} = \theta_{P_1} - 45°$$

(Triángulo: hipotenusa R, ángulo $2\theta_S$, cateto τ_{xy}, cateto $-\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}$)

$$\cos 2\theta_{S_1} = \frac{\tau_{xy}}{R} \qquad sen 2\theta_{S_1} = \frac{-\sigma_x - \sigma_y}{2R}$$

substituyo en la segunda ecuación de transform.

$$\boxed{\tau_{MAX} = \pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}}$$

otra forma de encontrar τ_{MAX} es $\boxed{\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \tau_{MAX}}$

Cuando existen esfuerzos cortantes maximos tambien existen normales

$$\boxed{\sigma_{x_1} = \sigma_{y_1} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \sigma_{PROM}}$$

- Para esfuerzo UNIAXIAL Y BIAXIAL, los planos de esfuerzo cortante ocurren a 45° de los ejes "x" e "y" (PLANOS PRINCIPALES)

- Para el caso de esfuerzo cortante puro, los esfuerzos maximos ocurren en el plano "X" y en el plano "Y".

CAPITULO 8
APLICACIONES DE ESTADO PLANO.

UNIDAD VII

RECIPIENTES ESFERICOS A PRESIÓN

Los recipientes a presión son estructuras cerradas que contienen líquidos o gases a presión.

Se considera que poseen pared delgada cuando la razón entre su radio r y espesor t es mayor que 10. $\left(\frac{r}{t} \geq 10\right)$

Se supone que la presión "p" interna es superior que la exterior, de lo contrario se colapsaría hacia adentro. (Evitar el pandeo hacia adentro).

ESFERA → FORMA IDEAL, PARA RESISTIR PRESIONES

σ, p', P

$$P = \text{"}p\text{"} \cdot (\pi \cdot r^2)$$

"p" es la presión MANOMÉTRICA y es siempre mayor a la externa

σ

$$p' = \sigma \cdot (2\pi \cdot r_m \cdot t)$$

σ es uniforme por la simetría de la figura, el esfuerzo esta distribuido uniformemente a traves del espesor t. (POR PARED DELGADA)

La resultante es $\sigma(2\pi \cdot r_m \cdot t)$

$$\Sigma F_h: \sigma(2\pi \cdot r_m \cdot t) - p(\pi \cdot r^2) = 0$$

$$\sigma = \frac{p\,\pi\,r^2}{2\pi\,r_m \cdot t}$$

$r_m = r + \frac{t}{2}$ y r poseen poca diferencia (DESPRECIABLE)

$r = r_m$

$$\sigma = \frac{p \cdot r^2}{2\pi \cdot t} = \frac{p \cdot r}{2t}$$

$$\boxed{\sigma = \frac{p \cdot r^2}{2 \cdot r_m \cdot t}} \quad \text{ó} \quad \boxed{\sigma = \frac{p \cdot r}{2t}}$$

La pared de un recipiente esférico presurizado esta sometida a fuerzas de tracción en todas las direcciones.

ESFUERZOS SUPERFICIE EXTERIOR

por lo general esta libe de acción de cargas

SIEMPRE SON PRINCIPALES → $\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{P.r}{2t}$ (PLANO XY) $\sigma_3 = 0$ (EN Z)

τ_{MAX} → ROTACIONES FUERA DEL PLANO, rotaciones con respecto a X y a Y. al orientarse 45° con respecto a "X" y "Y"

$$\tau_{MAX} = \frac{\sigma}{2} = \frac{P.r}{4t}$$

ESFUERZOS SUP. INTERIOR

un elemento posee los mismos σ_x y σ_y que un elemento del exterior. además un esfuerzo de compresión σ_Z igual a $-P$ que actua en Z.

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{P.r}{2t}$$

$$\sigma_3 = -P$$

En el plano $\tau = 0$ pero el esfuerzo cortante máximo fuera del plano (a 45° con respecto a X o Y) es

$$\tau_{MAX} = \frac{\sigma + P}{2} = \frac{P.r}{4t} + \frac{P}{2} = \frac{P}{2}\left(\frac{r}{2t} + 1\right)$$

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \rightarrow \frac{\sigma_1 - (-P)}{2} \Rightarrow \frac{\sigma + P}{2}$$

por ser de pared delgada $\frac{r}{2t} \gg 1$

Queda como

$$\tau_{MAX} = \frac{P.r}{2.2t} =$$

$$\tau_{MAX} = \frac{P.r}{4t}$$

Limitaciones

- El espesor debe ser pequeño (Pared delgada).
- "P" interna mayor que externa. (evitar PANDEO)
- análisis basado en presión interna, no se consideran efectos de cargas externas, reacciones, peso del contenido y el propio peso de la estructura.
- formulas validas en toda la pared excepto en sitios de concentración de tensiones. (esfuerzos).

RECIPIENTE CILINDRICO A PRESIÓN

Se realiza el analisis tomando una porción del recipiente con pared delgada.

. Se encuentra sometido a una presión interna.

los esfuerzos σ_1 y σ_2 son esfuerzos de membrana en la pared

NO HAY esfuerzo de corte sobre estas caras, por la simetría y cargas.

- σ_1 y σ_2 **SON PRINCIPALES**

$\sigma_1 \rightarrow$ esfuerzo CIRCUNFERENCIAL

$\sigma_2 \rightarrow$ esfuerzo longitudinal

b

σ_1 m

t

P

n

$P_1 = 2p.br$

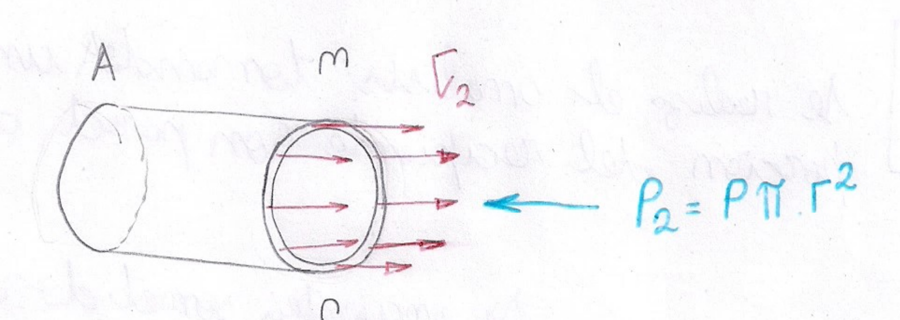
Q

σ_1

El esfuerzo circ. σ_1 se determina planteando

$$\sigma_1 (2b.t) - 2p.b.r = 0$$

$$\boxed{\sigma_1 = \frac{p.r}{t}}$$



El esfuerzo longitudinal o σ_2 se obtiene planteando

$$\sigma_2 (2\pi.r.t) - P.\pi.r^2 = 0$$

$$\sigma_2 . 2\pi r t = P.\pi.r^2$$

$$\boxed{\sigma_2 = \frac{P.r}{2t}}$$

de las dos expresiones obtengo que

$$\boxed{2\sigma_2 = \sigma_1}$$

Esfuerzos sobre el exterior y el interior.

EXTERIOR

σ_1

σ_2

σ_2

σ_1

En el exterior, están actuando σ_1 y σ_2 sobre el elemento de la pared. (elemento de esfuerzo).

"NO HAY P." fuera. (desprecia ble).

el tercer esfuerzo principal σ_3, es 0!

El τ_{MAX_Z} ocurre cuando roto a 45° el elemento siendo el eje al cual roto Z!

$$(\tau_{MAX})_Z = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{\sigma_1}{4} = \frac{P.r}{4t}$$ (esf en el PLANO)

fuera del plano, el esfuerzo de corte maximo lo obtengo rotando el elemento a 45° con respecto a X e Y.

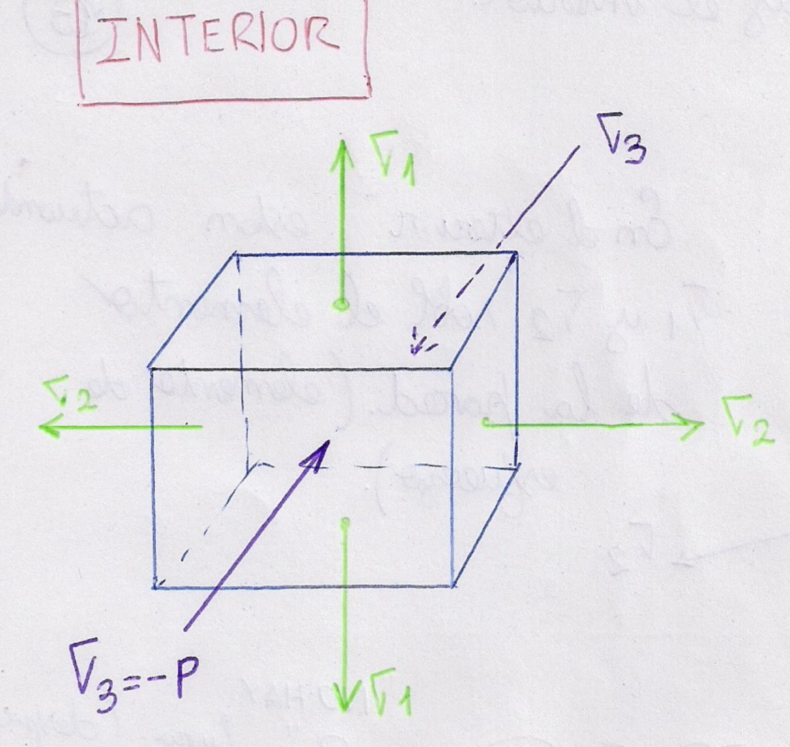
$$(\tau_{MAX})_X = \frac{\sigma_1}{2} = \frac{P.r}{2t}$$

$$(\tau_{MAX})_Y = \frac{\sigma_2}{2} = \frac{P.r}{4t}$$

$$\tau_{MAX} = \frac{\sigma_1}{2} = \frac{P.r}{2t}$$

ESFUERZO CORTANTE MAX. ABSOLUTO.

INTERIOR



en el interior los esfuerzos principales son

$$\sigma_1 = \frac{P.r}{t}$$

$$\sigma_2 = \frac{P.r}{2t}$$

$$\boxed{\sigma_3 = -P}$$

los tres esfuerzos cortantes máximos, que se obtienen mediante rotaciones a 45° con respecto a x, y y z son

$$(\tau_{MAX})_x = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{P.r}{2t} + \frac{P}{2}$$

$$(\tau_{MAX})_y = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} = \frac{P.r}{4.t} + \frac{P}{2}$$

$$(\tau_{MAX})_z = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{P.r}{4t}$$

el termino $\frac{P}{2}$ se puede quitar si es un cascarón de pared delgada (iguales a las expresiones del exterior).

No se considera la presencia del esfuerzo de compresión en la dirección z. (iguales interior y exterior), es viable si se consideran los otros numerosos aproximaciones en esta teoría.

- Estas expresiones son validas en partes del cilindro donde no haya discontinuidades o concentraciones de esfuerzos (en los extremos por ejemplo).

ESFUERZOS MAXIMOS EN VIGAS 8.4

Es usual que se comience determinando los esfuerzos normal y cortante que actuan sobre secciones transversales.

$$\sigma = -\frac{M.y}{I}$$

$$\tau = \frac{V.Q}{I.b}$$

↳ esfuerzo de corte, valores max. en el eje neutro.

↳ esfuerzos normales; valores máximos a la fibra mas alejada del eje neutro

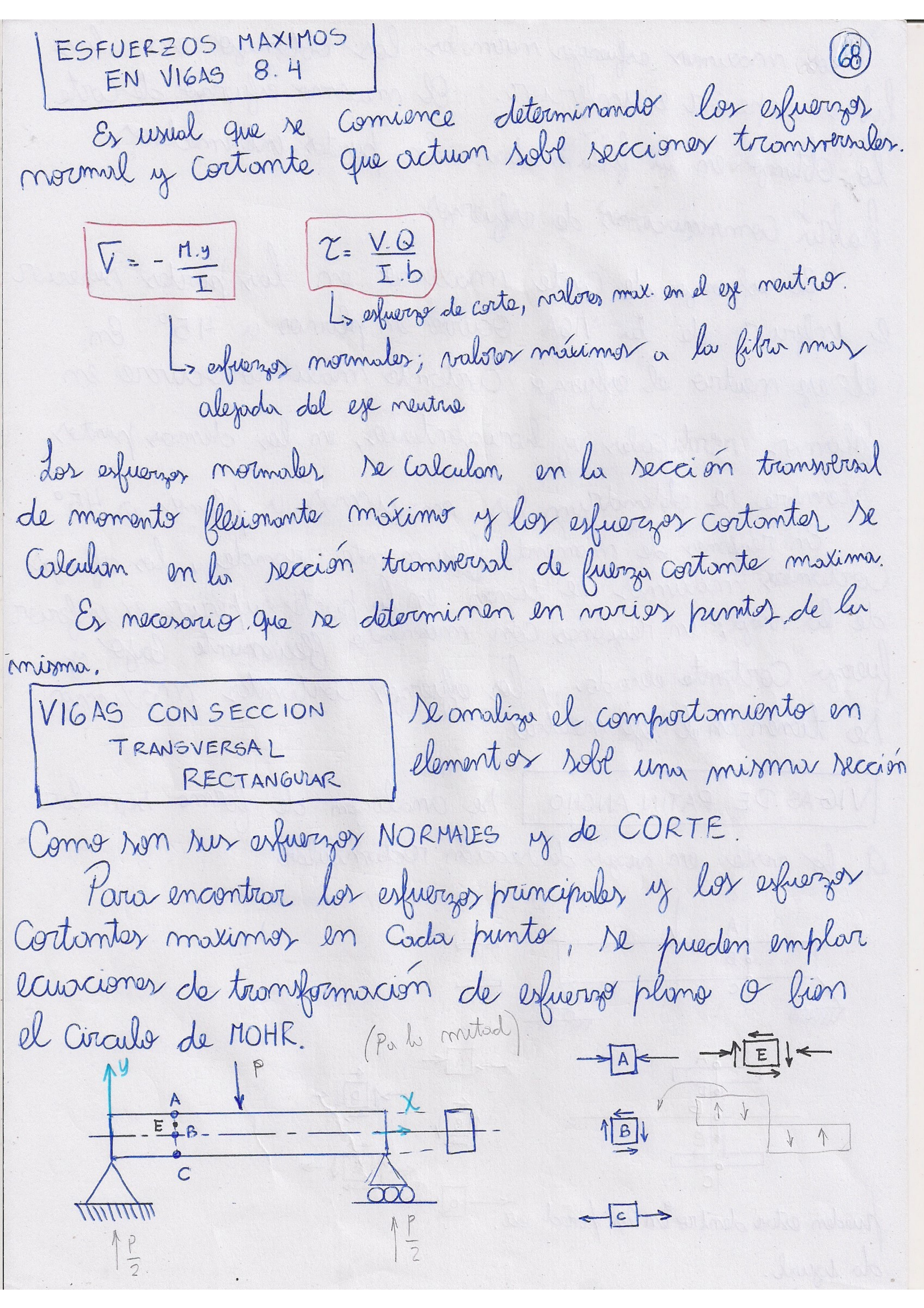
Los esfuerzos normales se calculan en la sección transversal de momento flexionante máximo y los esfuerzos cortantes se calculan en la sección transversal de fuerza cortante maxima.

Es necesario que se determinen en varios puntos de la misma.

VIGAS CON SECCION TRANSVERSAL RECTANGULAR

Se analiza el comportamiento en elementos sobre una misma sección. Como son sus esfuerzos NORMALES y de CORTE.

Para encontrar los esfuerzos principales y los esfuerzos cortantes maximos en cada punto, se pueden emplear ecuaciones de tranformación de esfuerzo plano o bien el circulo de MOHR.

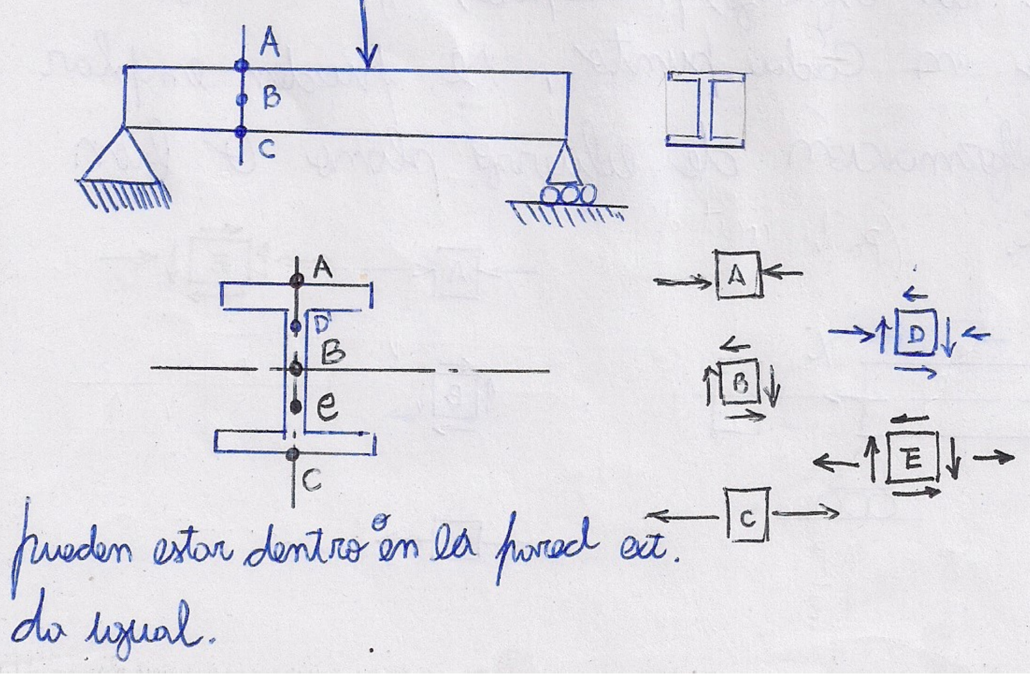


Los maximos esfuerzos normales los obtengo en las fibras superior e inferior. El maximo esfuerzo de Corte lo obtengo en la fibra media. En puntos intermedios habrá comvinaciones de esfuerzos.

El esfuerzo de Corte maximo en las partes superior e inferior de la VIGA ocurre en planos a 45°. En el eje neutro el esfuerzo Cortante maximo ocurre en planos verticales y horizontales, en los demas puntos siempre se obtendran los maximos a planos a 45°.

En regiones de momento flexionante grande, los esfuerzos Cortantes maximos se tienen en la parte superior e inferior de la viga; en regiones con momento flexionante bajo y fuerza Cortante elevada, los esfuerzos Cortantes maximos se tienen en el eje neutro.

VIGAS DE PATIN ANCHO se analizan de forma similar a lo visto en vigas de sección rectangular



pueden estar dentro o en la pared ext.

da igual.

Los esfuerzos principales maximos ocurren en la parte superior e inferior de la VIGA. donde los esfuerzos obtenidos Con la formula de la flexión tienen sus valores máximos. Dep. del momento flexionante ya Que algunas veces los valores maximos ocurren en la unión del alma Con el patín. En el corte seran valores significativos, los normales son ligeramente menores.

PUNTO CRIT.

FUNDAMENTAL ANALIZAR SOBRE LOS PUNTOS CRITICOS

UNION DE EL PATÍN Y EL ALMA

Esfuerzo cortante maximo. Siempre ocurre sobre el eje neutro.

Sin embargo, los esfuerzos cortantes maximos que actuan sobre planos inclinados por lo general ocurren en la parte superior o inferior de la viga o donde el alma se une al patín debido a la presencia de esfuerzos normales.

Es necesario el analisis en puntos de concentración de esfuerzos, cerca de los apoyos, puntos de carga, filetes y orificios.

CARGAS COMBINADAS 8.5

en muchos casos se requiere que los elementos resistan mas de un tipo de carga. Cuando existe mas de un tipo de carga, se dice que el elemento esta bajo cargas combinadas.

Se utilizan metodos de superposición para el analisis, sin embargo es necesario que siga la ley de HOOKE el material. (esfuerzos y deformaciones sean funciones lineales). y que los desplazamientos sean pequeños.

METODO DE ANÁLISIS

1) selección de punto de la estructura para determinar ef. y def. (donde sean grandes).

2) determinar las resultantes de esfuerzos en la sección que contiene al punto.

3) Calcular los ef. normal y cortante en el punto, si es un recipiente a presión tambien los esfuerzos debidos a presión interna.

$\sigma = \frac{P}{A}$ | $\tau = \frac{T \cdot r}{I_p}$ | $\sigma = \frac{M \cdot y}{I}$ | $\tau = \frac{V \cdot Q}{I \cdot b}$ | $\sigma = \frac{P \cdot r}{t}$

4) Combine los esfuerzos. (obtener σ_x, σ_y y τ_{xy})

5) Det. esfuerzos principales. (MOHR o EC.)

6) Det. las def. en un punto, con la ley de HOOKE.

7) Seleccionar puntos adicionales y repetir el proceso, hasta tener suf. información!

DEFLEXIONES EN VIGAS : UNIDAD VIII

EC. DIF. DE LA CURVA DE DEFLEXIÓN 9.2

Determinar deflexiones se basan en ecuaciones diferenciales de la curva de deflexión y sus relaciones asociados.

La deflexión "V" es el desplazamiento en la dirección y de cualquier punto sobre el eje la viga. El eje y es positivo hacia arriba, las deflexiones son positivas hacia arriba.

(+) (−)

debemos expresar la deflexión V. como una función de la coordenada "X".

m1 ubicado a una distancia X desde el origen, tambien se muestra el segundo punto m_2 a $X + dX$, en ese punto la def. es $V + dV$
↳ INCREMENTO

Cuando la viga se flexiona, no solo hay una deflexión en cada punto a lo largo del eje, tambien hay una rotación.

θ es el angulo de rotación. (entre el eje X y tangente a la viga). Angulo positivo cuando es contrario a las manecillas del reloj.

en m_2 $\theta + d\theta$ (ang rot).

$$\rho . d\theta = ds$$

Ls dist. a lo largo de la curva de def. entre m_1 y m_2.

$$K_\zeta = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds}$$ ↗ (+) (−)

La pendiente de la curva de deflexión es la primera derivada dV/dx de la expresión para la def. v.

Pendientes es el incremento dV de la deflexión dividido entre el incremento de dx a lo largo de X.

$$\frac{dv}{dx} = Tg\,\theta \qquad \theta = Tg^{-1}\left(\frac{dv}{dx}\right)$$

↓
POR QUE
SON INF.
PEQUEÑOS

$$Cos\,\theta = \frac{dx}{ds} \qquad sen\,\theta = \frac{dv}{ds}$$

VIGAS CON ROTACIONES PEQUEÑAS.

las curvas de deflexión de la mayor parte de las vigas y columnas tienen angulos de rotación, deflexiones y curvaturas muy pequeñas. SIMPLIFICACIONES MATEMATICAS para resolverlo.

$$ds \approx dx \quad \text{(PRIMERA)}$$

$$K_\zeta = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx}$$

(SEGUNDA)

$$\theta \approx \operatorname{tg}\theta = \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2V}{dx^2}$$

Si combino con la $K_c = \frac{1}{\rho} = \frac{d^2V}{dx^2}$ VALIDA PARA CUALQ. MATERIAL SIEMPRE QUE LAS ROTACIONES SEAN PEQ.

→ Euler Bernoulli

Si es L.E y sigue HOOKE.

$$K = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{E.I} \quad (M \to M_f)$$

E.I: RIGIDEZ

Si combino las dos anteriores obtengo la ecuación diferencial básica de la curva de deflexión.

Bernoulli

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{M}{E.I}$$

Se podrá integrar siempre que M, E e I sean func. de X.

¡ecuaciones adicionales!, Q = V (CORTE).

$$\frac{dQ}{dx} = -q \qquad \frac{dM}{dx} = Q$$

$$V'' = \frac{M}{E.I} \Rightarrow M = E.I.V''$$

$$Q = \frac{dM}{dx} = \frac{d}{dx}(E.I.V'') = \boxed{E.I.V''' = Q}$$

$$-q = \frac{dQ}{dx} = \frac{d}{dx}(E.I.V''') = \boxed{E.I.V'''' = -q}$$

Solo para el caso de VIGAS PRISMATICAS, donde E.I es Constante.

Las ec. Dif. encontradas se llaman, ecuación del momento flexionante, ecuación de la fuerza cortante y ecuación de la Carga.

- EL MAT. SIGUE HOOKE Y LAS PEND. DE LA CURVA DE DEFLEXIÓN SON MUY PEQUEÑAS.
- Se Consideran que las defor. son debidas a flexión PURA!

EXPRESION EXACTA

Con pendientes grandes, no se pueden usar las aprox. anteriores. Se deben recurrir a expresiones exactas.

$$K = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds} = \frac{d(\operatorname{arctg} V')}{dx}\frac{dx}{ds}$$

se observa de la figura anterior, $ds^2 = dx^2 + dV^2$ ó

$$ds = \left[dx^2 + dv^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

al dividir ambos lados por dx

$$\frac{ds}{dx} = \left[1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right]^{1/2} = \left[1 + v'^2\right]^{1/2}$$

ó

$$\frac{dx}{ds} = \frac{1}{\left[1 + v'^2\right]^{1/2}}$$

$$\frac{d}{dx}(\arctg v') = \frac{v''}{1+(v')^2}$$

substituyo y obtengo

$$K = \frac{1}{\rho} = \frac{v''}{\left[1 + (v')^2\right]^{3/2}}$$

9.3 DEFLEXIONES POR INTEGRACIÓN DE LA ECUACIÓN DEL MOMENTO FLEXIONANTE.

Se trabaja con la ecuación del momento flexionante, como es de segundo orden son necesarias dos integraciones. La primera produce la pendiente $\boxed{v' = \frac{dv}{dx}}$ y la segunda produce la deflexión v.

Determinar la expresión del momento flector M, Sustituimos la expresión para M en la ecuación diferencial e integramos (V' sale). Produce cte. 1. de integracion Se integra nuevamente y sale (v) y cte 2. de integración.

Las ctes. se pueden encontrar mediante condiciones son de tres tipos.

1) Condiciones de frontera; relación con las deflexiones y pend. en los apoyos de la viga.

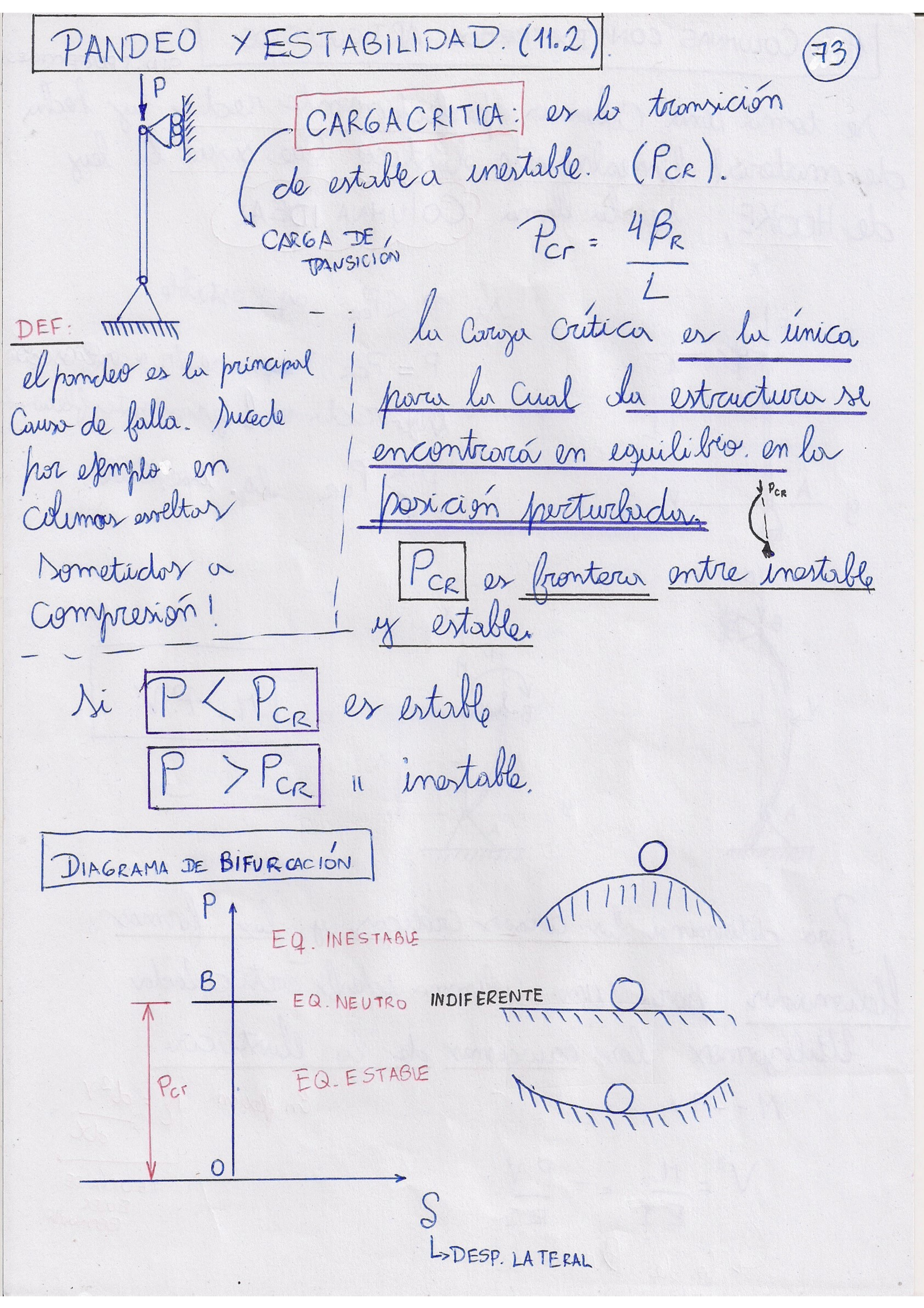
2) Cond. de Continuidad; puntos donde confluyen los regiones de integración.

3) Condiciones de simetría; pueden estar presentes, si soporta una Carga uniforme en toda su longitud, sabemos de antemano que la pendiente de la Curva de deflexión en el punto medio debe ser cero.

NUMERO CONDICIONES IDTES = NUMERO DE CTES (INCOGNITAS)

9.4 DEFLEXIONES POR INTEGRACIÓN DE LAS ECUACIONES DE LA FUERZA CORTANTE Y DE LA CARGA.

Similar a lo anterior, se requieren mas integraciones.



PANDEO Y ESTABILIDAD. (11.2)

CARGA CRITICA: es la transición de estable a inestable. (P_{CR}).

CARGA DE TRANSICIÓN

$$P_{cr} = \frac{4\beta_R}{L}$$

DEF: el pandeo es la principal causa de falla. Sucede por ejemplo en columnas esbeltas sometidas a compresión!

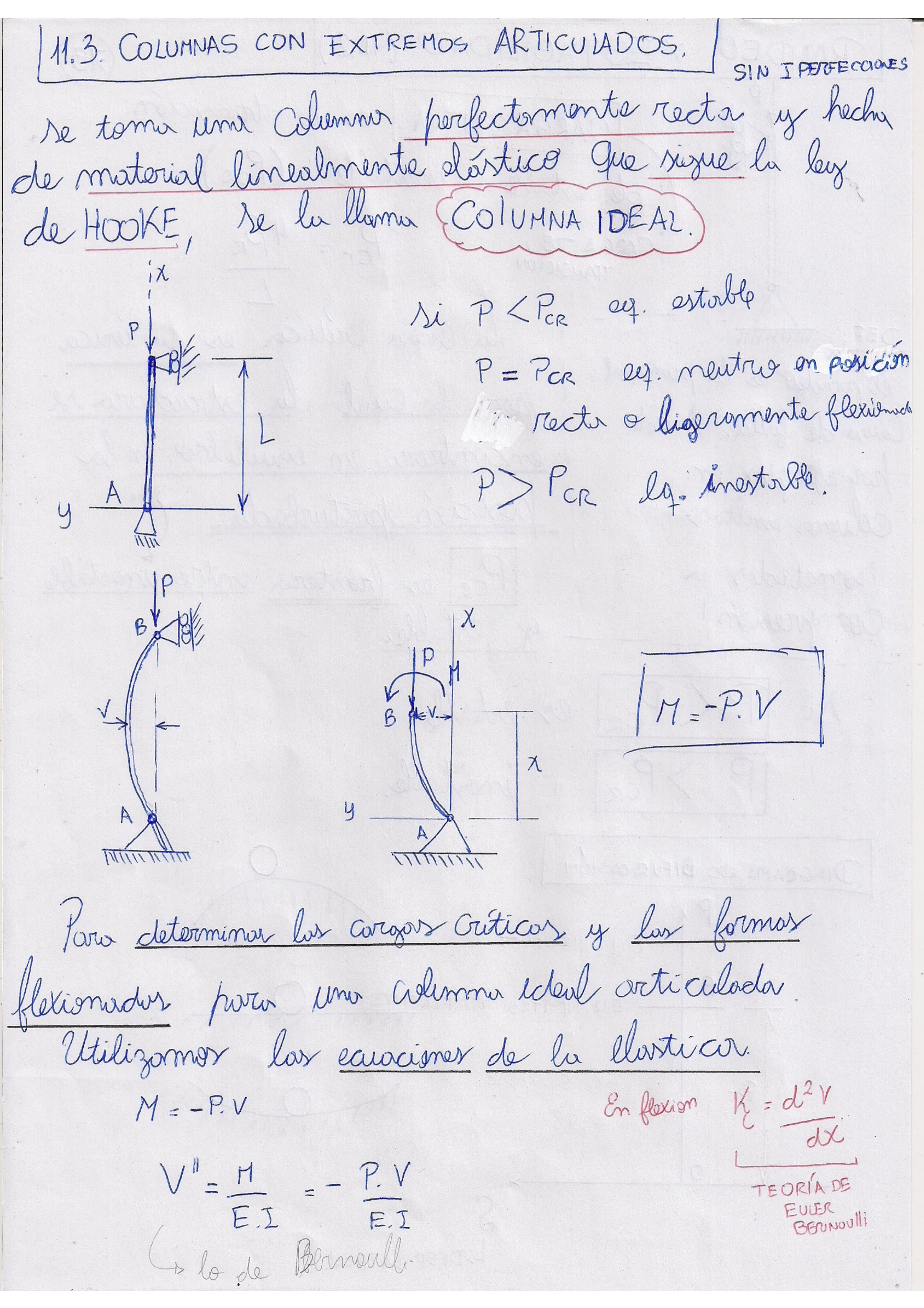
la carga crítica es la única para la cual la estructura se encontrará en equilibrio en la posición perturbada.

P_{CR} es frontera entre inestable y estable.

Si $P < P_{CR}$ es estable

$P > P_{CR}$ " inestable.

DIAGRAMA DE BIFURCACIÓN



11.3. COLUMNAS CON EXTREMOS ARTICULADOS.

SIN IMPERFECCIONES

Se toma una columna perfectamente recta y hecha de material linealmente elástico que sigue la ley de HOOKE, se la llama COLUMNA IDEAL.

si $P < P_{CR}$ eq. estable

$P = P_{CR}$ eq. neutro en posición recta o ligeramente flexionada

$P > P_{CR}$ eq. inestable.

$$M = -P.V$$

Para determinar las cargas críticas y las formas flexionadas para una columna ideal articulada. Utilizamos las ecuaciones de la elástica.

$$M = -P.V$$

En flexion $K = \frac{d^2V}{dx}$

TEORÍA DE EULER BERNOULLI

$$V'' = \frac{M}{E.I} = -\frac{P.V}{E.I}$$

↳ lo de Bernoulli

$$V'' + \frac{P}{E \cdot I} \cdot V = 0$$

$\frac{P}{E \cdot I} = K^2$ ↳ Cantidad positiva

la solucion general es $V = C_1 \cdot \text{sen}\, K.X + C_2 \cdot \cos K.x$

siendo C_1 y C_2 Ctes de integración (a evaluarse)

Usando cond de frontera.

$$V(0) = 0 \quad y \quad V(L) = 0$$

$V(0) = C_1 \cdot \text{sen}(0) + C_2 \cos(0)$; $C_1 \cdot \text{sen}(0) = 0$, $C_2 = 0$

$C_2 = 0$ ∴ $V = C_1 \cdot \text{sen}\, KK$

$V(L) = C_1 \cdot \text{sen}(K.L) = 0$

la ecuacion queda $C_1 \cdot \text{sen}\, K.L = 0$

→ si $C_1 = 0 \rightarrow V = 0$ (Columna recta).

↓ $\text{sen}\, K.L = 0 \rightarrow K.L = 0, \pi, 2\pi$

$K.L = n.\pi \qquad n = 1, 2, 3, \ldots, n$

$$P = \frac{n^2 . \pi^2 . E . I}{L^2}$$

$$V = C_1 \cdot \text{sen} \frac{n \pi x}{L}$$

CARGA CRITICA

$$P_{CR} = \frac{\pi^2 . E . I}{L^2} \quad \text{Con } n=1$$

La carga crítica menor para una columna con extremos articulados.

Con $n=1$ se denomina caso fundamental de pandeo de columna.

El pandeo descrito aquí se llama pandeo de Euler, y P_{CR} se denomina carga de Euler.

$n=1$ en la práctica

n es el numero de semiondas

n=1 n=2

ESFUERZO CRITICO

divido la carga$_{CR}$ entre el área de la sección transversal.

$$\sigma_{CR} = \frac{P_{CR}}{A} = \frac{\pi^2 . E . I}{A . L^2}$$

Siendo $r_G = \sqrt{\frac{I}{A}}$ (radio de giro)

$\sigma_{CR} < \sigma_{02}$

FALLA POR PANDEO

$\sigma_{02} < \sigma_{CR}$

FALLA EL MATERIAL

Combinando la expresión de radio de giro

$$\sigma_{CR} = \frac{\pi^2 \cdot E}{(L/r_G)^2}$$

$$\lambda = \frac{L}{r_G}$$

donde $\frac{L}{r_G}$ se denomina esbeltez.

Una Columna que es larga y esbelta tendrá una relación de esbeltez alta y por lo tanto un esf. Crítico bajo.. (MENOS CARGA PARA SER PUESTA EN ESTADO DE PANDEO).

Una Columna que es Corta y robusta tendrá una relación de esbeltez baja y se pandeará con esfuerzo alto (valores comunes, entre 30 y 150).

$$\frac{L}{r_G} = \lambda$$

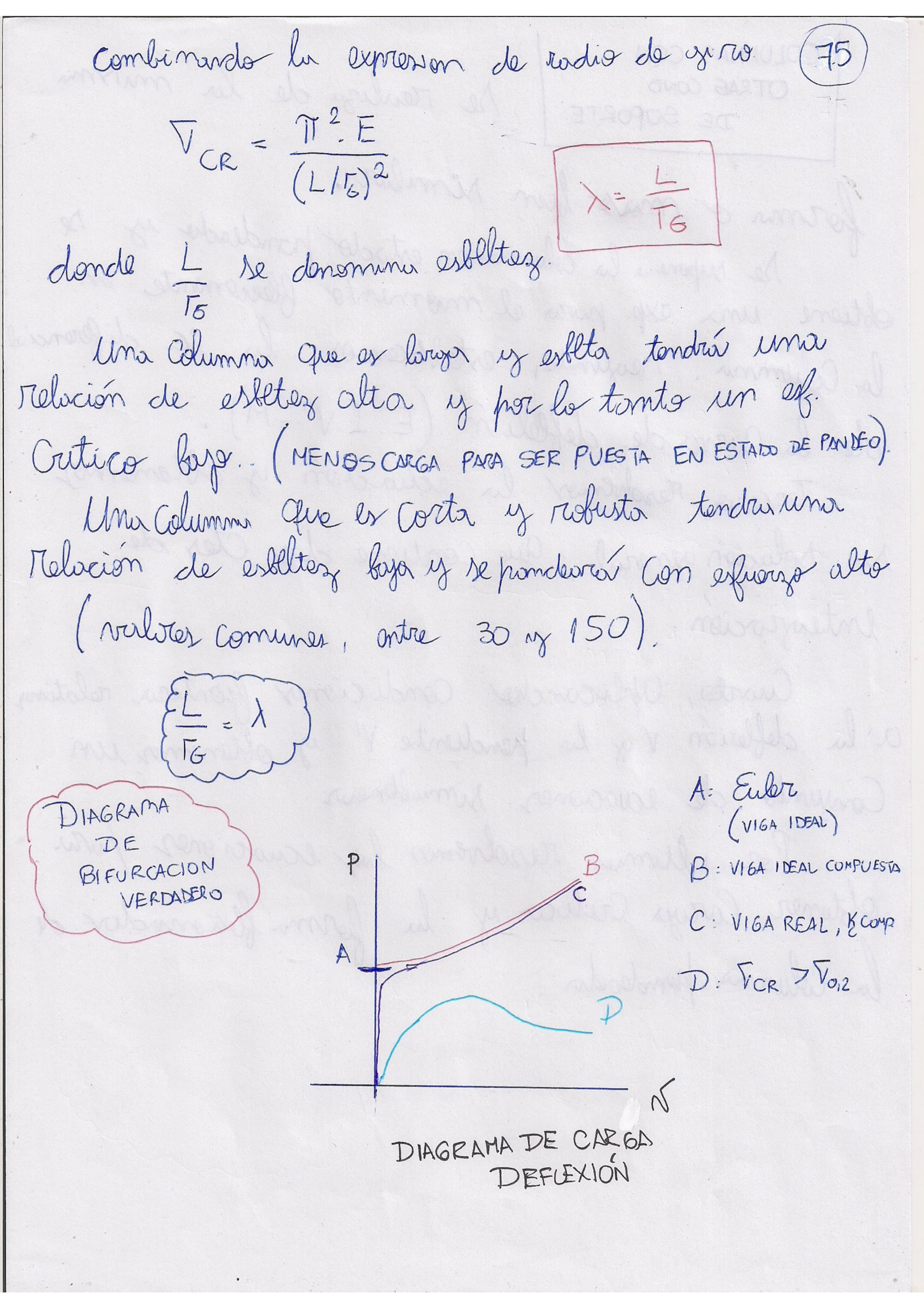


DIAGRAMA DE CARGA DEFLEXIÓN

COLUMNAS CON OTRAS COND. DE SOPORTE

Se realiza de la misma forma o mas bien similar.

Se supone a la columna en estado pandeado y se obtiene una exp. para el momento flexionante en la columna. Segundo, establecemos la ec. diferencial de la curva de deflexión ($E.I\,V'' = M$).

Tercero, resolvemos la ecuación y obtenemos su solución general, que contiene dos ctes de integración.

Cuarto, aplicando condiciones frontera relativas a la deflexión V y la pendiente V' y obtenemos un conjunto de ecuaciones simultaneas.

Por ultimo resolvemos las ecuaciones para obtener carga crítica y la forma flexionada de la columna pandeada

LONGITUDES EFECTIVAS (relación con EULER).

Relación para columnas con varias condiciones de soporte se pueden relacionar con la carga crítica de una columna con extremos articulados.

L_e es la longitud de la columna equivalente con extremos articulados, es decir, es la long. de una columna con extremos articulados con una curva de deflexión que concuerda exactamente con toda o parte de la curva de deflexión de la columna original.

$$L_e = K \cdot L$$

P

$$L_e = 2L.$$

$$P_{CR} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{L_e^2}$$

La L_e a menudo se expresa en términos de factor de longitud efectiva K

$$L_e = K \cdot L$$ → longitud real de la C.

↳ K = 2 con columna empotrada

$L_e = L/2$ $K = \frac{1}{2}$

$L_e = 0{,}7L$.

$K = 0{,}7$.

L_e (Resumen de MARCOS).

Es la longitud de una columna con extremos articulados con una curva de deflexión que concuerda exactamente con toda o parte de la curva de deflexión de la columna original. Puede expresarse también como la mayor distancia entre puntos de inflexión de la curva de deflexión de la viga, suponiendo que la curva se extiende hasta alcanzar los puntos de inflexión si fuese necesario.

$$P_{CR} = \frac{\pi^2 . E . I}{L_e^2}$$

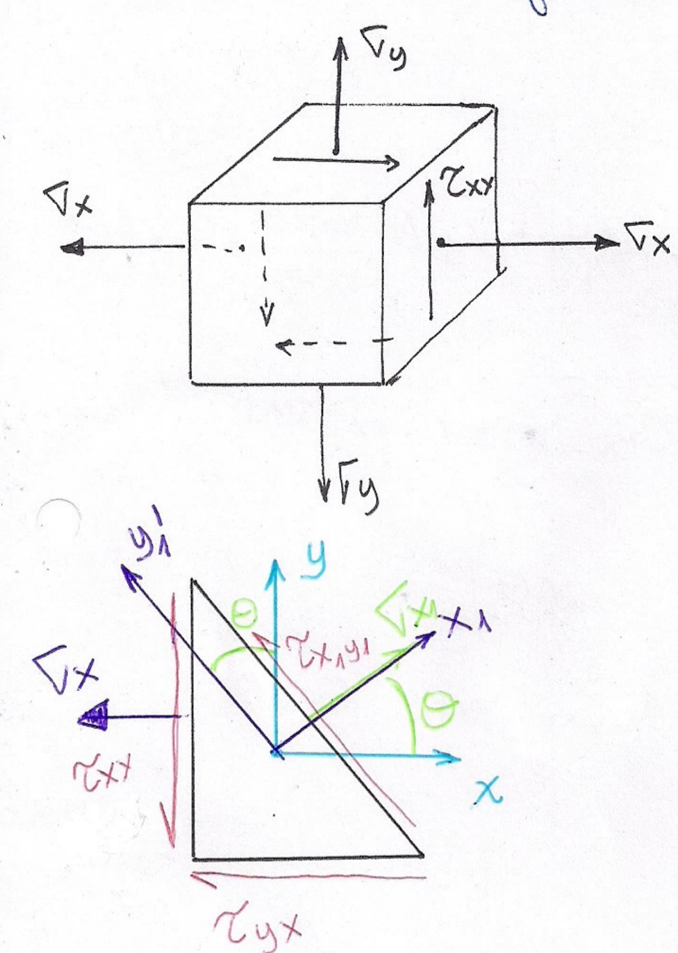
E-E : 0,5 l

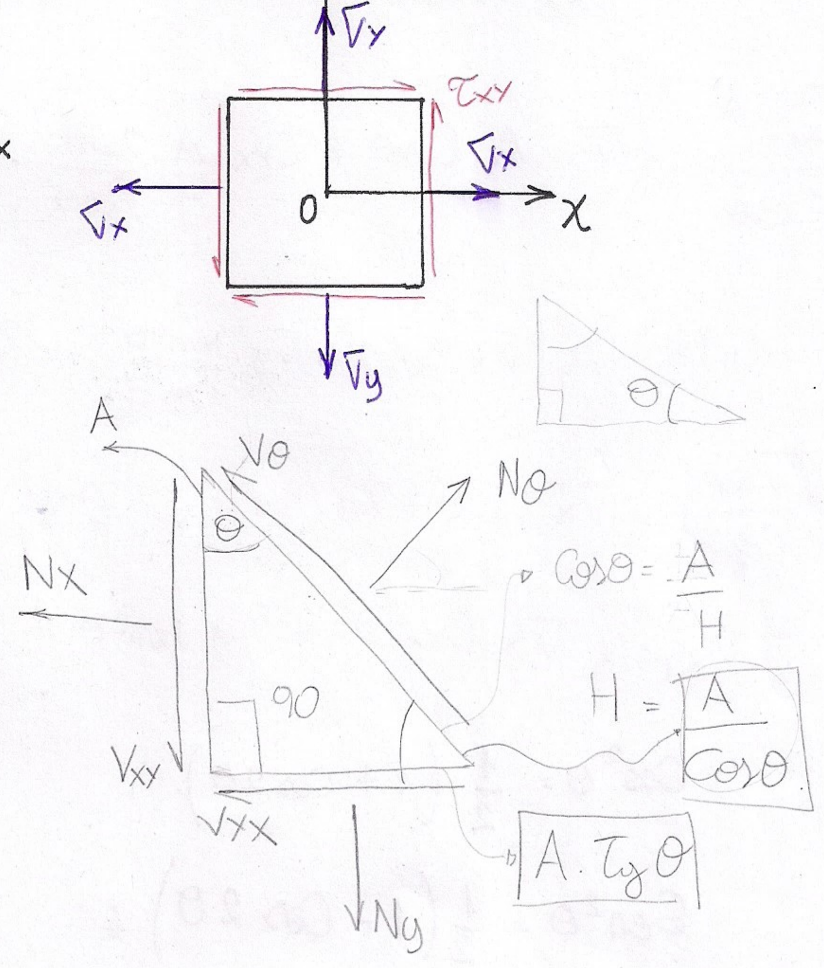
E-A . 0,7 l

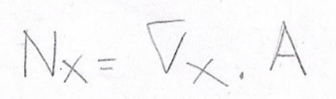
ES = 2

ESFUERZOS SOBRE SECCIONES INCLINADAS.

- elemento de esfuerzo en forma de cuña.







$N_x = \sigma_x . A$

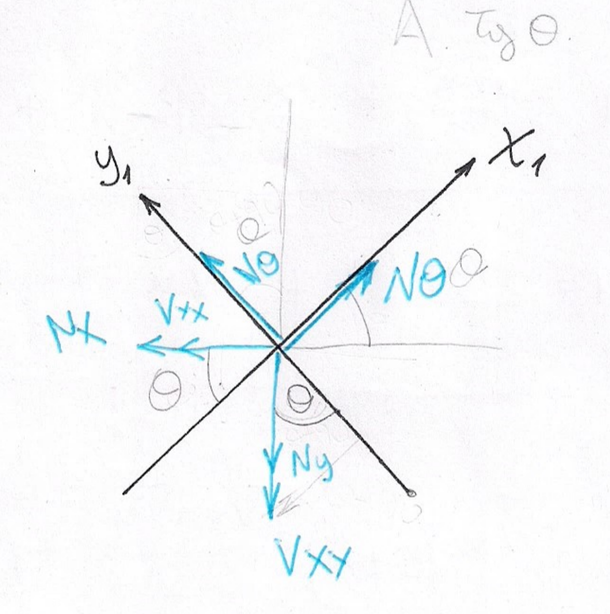
$N_y = \sigma_y . A . \text{tg}\,\theta$

$V_{xx} = \tau_{xy} . A$

$V_{yx} = \tau_{xx} . A . \text{tg}\,\theta$

$N_\theta = \dfrac{\sigma_{x1} . A}{\cos\theta}$

$V_\theta = \dfrac{\tau_{x_1 y_1} . A}{\cos\theta}$



$$\Sigma F_{x_1} = N_\theta - N_x . \cos\theta - V_{yx} . \cos\theta - N_y . \mathrm{sen}\,\theta - V_{xy} . \mathrm{sen}\,\theta = 0 .$$

$$= \sigma_{x_1} . \frac{A}{\cos\theta} - \sigma_x . A . \cos\theta - \tau_{yx} A \, \mathrm{tg}\,\theta . \cos\theta - \sigma_y . A . \tan\theta . \mathrm{sen}\,\theta -$$

$$- \tau_{xx} . A . \mathrm{sen}\,\theta = 0 ;$$

$$\frac{\sigma_{x_1} . A}{\cos\theta} = \sigma_x . A . \cos\theta + \tau_{yx} . A . \frac{\mathrm{sen}\,\theta}{\cos\theta} . \cos\theta + \sigma_y A \frac{\mathrm{sen}^2\theta}{\cos\theta} + \tau_{xy} . A \, \mathrm{sen}\,\theta$$

$$= A \left(\sigma_x . \cos\theta + \sigma_y . \frac{\mathrm{sen}^2\theta}{\cos\theta} + \tau_{yx} . \mathrm{sen}\,\theta + \tau_{xy} . \mathrm{sen}\,\theta \right)$$

$$\frac{\sigma_{x_1}}{\cos\theta} = \left(\sigma_x . \cos\theta + \sigma_y . \frac{\mathrm{sen}^2\theta}{\cos\theta} + 2 \tau_{xy} . \mathrm{sen}\,\theta \right)$$

$$\sigma_{x_1} = \sigma_x . \cos^2\theta + \sigma_y \, \mathrm{sen}^2\theta + 2 \tau_{xy} . \mathrm{sen}\,\theta . \cos\theta .$$

$$\cos^2\theta = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\theta)$$

$$\mathrm{sen}^2\theta = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\theta)$$

$$2 \, \mathrm{sen}\,\theta \cos\theta = \mathrm{sen}\, 2\theta .$$

$$\sigma_{x_1} = \frac{\sigma_x}{2} + \frac{\sigma_x . \cos^2\theta}{2} + \frac{\sigma_y}{2} - \frac{\sigma_y . \cos 2\theta}{2} + \tau_{xy} . \mathrm{sen}\, 2\theta$$

$$\boxed{\sigma_{x_1} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} . \mathrm{sen}\, 2\theta .}$$

$$\boxed{\sigma_{y_1} = \sigma_x (\theta + 90) = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} . \mathrm{sen}\, 2\theta}$$

$$\Sigma F_{y_1} = V_\theta - N_y \cdot \cos\theta - V_{xy} \cdot \cos\theta + N_x \cdot \operatorname{sen}\theta + V_{yx} \cdot \operatorname{sen}\theta = 0$$

$$= \tau_{x_1y_1} \cdot \frac{A}{\cos\theta} - \sigma_y \cdot A \cdot \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \cdot \cos\theta - \tau_{xy} \cdot A \cdot \cos\theta + \sigma_x \cdot A \cdot \operatorname{sen}\theta +$$

$$+ \tau_{yx} \cdot A \cdot \operatorname{tg}\theta \operatorname{sen}\theta = 0$$

$$\tau_{x_1y_1} \cdot \frac{A}{\cos\theta} = \sigma_y \cdot A \operatorname{sen}\theta + \tau_{xy} \cdot A \cos\theta - \sigma_x \cdot A \operatorname{sen}\theta - \tau_{yx} \cdot A \cdot \operatorname{tg}\theta \cdot \operatorname{sen}\theta$$

$$\frac{\tau_{x_1y_1}}{\cos\theta} = \left(\sigma_y \cdot \operatorname{sen}\theta + \tau_{xx} \cdot \cos\theta - \sigma_x \cdot \operatorname{sen}\theta - \tau_{yx} \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos\theta}\right)$$

$$\tau_{x_1y_1} = \sigma_y \operatorname{sen}\theta \cdot \cos\theta - \sigma_x \cdot \operatorname{sen}\theta \cdot \cos\theta + \tau_{xy} \cdot \cos^2\theta - \tau_{xx} \operatorname{sen}^2\theta$$

$$\tau_{x_1y_1} = -(\sigma_x - \sigma_y) \operatorname{sen}\theta \cos\theta + \tau_{xx}(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)$$

$$\boxed{\tau_{x_1y_1} = -\frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2} \operatorname{sen}2\theta + \tau_{xx} \cdot \cos 2\theta}$$

$$\sigma_{x_1} + \sigma_{y_1} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos(2\theta) + \tau_{xy} \operatorname{sen}(2\theta) +$$

$$+ \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \operatorname{sen} 2\theta$$

$$\sigma_{x_1} + \sigma_{y_1} = \frac{\sigma_x}{2} + \frac{\sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x}{2} + \frac{\sigma_y}{2}$$

$$\boxed{\sigma_{x_1} + \sigma_{y_1} = \sigma_x + \sigma_y}$$ ✓

Casos especiales de esfuerzo plano.

ESFUERZO UNIAXIAL

$$\begin{cases} \sigma_y = 0 \\ \tau_{xy} = 0 \end{cases}$$

$$\sigma_{x_1} = \frac{\sigma_x}{2}\left(1 + \cos(2\theta)\right)$$

$$\tau_{x_1 y_1} = -\frac{\sigma_x}{2} \cdot \operatorname{sen}(2\theta)$$

CORTANTE PURO

$$\begin{cases} \sigma_x = 0 \\ \sigma_y = 0 \end{cases}$$

$$\sigma_{x_1} = \tau_{xy} \cdot \operatorname{sen} 2\theta$$

$$\tau_{x_1 y_1} = \tau_{xy} \cdot \cos 2\theta$$

ESFUERZO BIAXIAL

$$\left\{ \tau_{xy} = 0 \right.$$

$$\sigma_{x_1} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta$$

$$\tau_{x_1 y_1} = -\frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2} \cdot \operatorname{sen}(2\theta)$$

TENSIONES PRINCIPALES

$$\sigma_{x_1} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \cdot sen 2\theta$$

$$\frac{d\sigma_{x_1}}{d\theta} = 0 + \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right) - sen 2\theta \cdot 2 + 2\tau_{xy} \cos 2\theta$$

$$\frac{d\sigma_{x_1}}{d\theta} = -2 \cdot \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right) sen 2\theta + 2\tau_{xy} \cdot \cos 2\theta$$

$$\frac{d\sigma_{x_1}}{d\theta} = -(\sigma_x - \sigma_y)\, sen 2\theta_p + 2\tau_{xy} \cos 2\theta_p$$

$$\frac{d\sigma_x}{d\theta} = 0$$

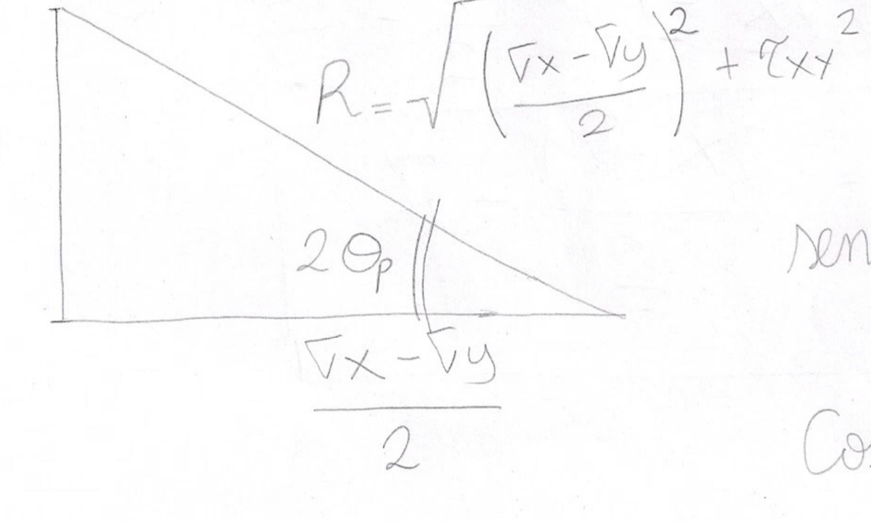
Igualo a 0

$$sen 2\theta_p \cdot (\sigma_x - \sigma_y) = 2 \tau_{xy} \cdot \cos 2\theta p$$

$$\frac{sen 2\theta p}{\cos 2\theta p} = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

$$\boxed{tg\, 2\theta p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}}$$

DIRECCIÓN PRINCIPAL



$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$sen 2\theta p = \frac{\tau_{xy}}{R}$$

$$\cos 2\theta p = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2R}$$

Reemplazo en la ecuacion de transformacion

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2R}\right) + \tau_{xy} \cdot \frac{\tau_{xy}}{R}$$

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{R} + \frac{\tau_{xy}^2}{R}$$

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{R} \cdot R^2$$

$$\boxed{\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + R}$$

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_x + \sigma_y$$

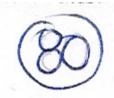
$$\sigma_2 = \sigma_x + \sigma_y - \sigma_1$$

$$\sigma_2 = \sigma_x - \sigma_y - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - R$$

$$\sigma_2 = \sigma_x - \sigma_y - \frac{\sigma_x}{2} - \frac{\sigma_y}{2} - R$$

$$\boxed{\sigma_2 = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} - R}$$

ESF. CORTANTE MÁXIMO.



$$\tau_{x_1y_1} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \operatorname{sen} 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

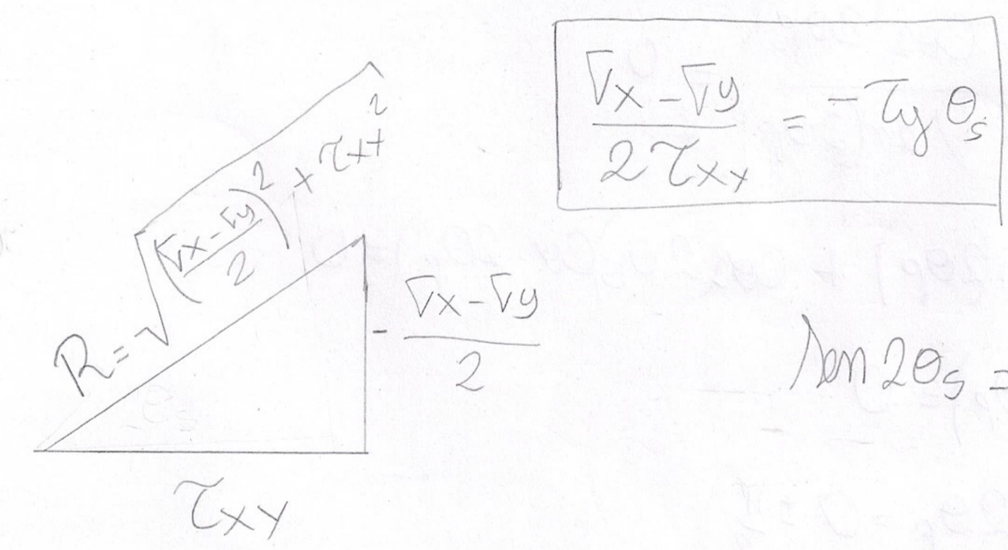
$$\frac{d\tau_{x_1y_1}}{d\theta} = -2\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - 2\tau_{xy} \operatorname{sen} 2\theta.$$

$$\frac{d\tau_{x_1y_1}}{d\theta} = 0 = -(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\theta - 2\tau_{xy} \operatorname{sen} 2\theta.$$

$$(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\theta = -2\tau_{xy} \operatorname{sen} 2\theta$$

$$\frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2\tau_{xy}} = -\frac{\operatorname{sen} 2\theta}{\cos 2\theta}$$

$$\boxed{\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} = -\operatorname{tg} \theta_s}$$



$$\operatorname{sen} 2\theta_s = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2R}$$

$$\cos 2\theta_s = \frac{\tau_{xy}}{R}$$

Reemplazo:

$$\tau_{x_1y_1} = \left(-\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)\left(-\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2R}\right) + \tau_{xy} \cdot \frac{\tau_{xy}}{R}$$

$$\tau_{x_1y_1} = \tau_{MAX} = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 \frac{1}{R} + \tau_{xy}^2 \cdot \frac{1}{R}$$

$$\tau_{MAX} = \frac{1}{R} \cdot \left(\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2\right)$$

R^2

$$\tau_{MAX} = \frac{1}{R} \cdot R^2$$

$$\boxed{\tau_{MAX} = R}$$

$$tg(2\theta_s) = -\frac{1}{tg(2\theta_p)}$$

$$\frac{sen\,2\theta_s \cdot sen\,2\theta_p + \cos 2\theta_s \cos 2\theta_p}{\cos 2\theta_s \; sen\,2\theta_p}$$

$$\frac{sen(2\theta_s)}{\cos(2\theta_s)} + \frac{\cos(2\theta_p)}{sen(2\theta_p)} = 0$$

$$sen(2\theta_s)\,sen(2\theta_p) + \cos(2\theta_s)\cos(2\theta_p) = 0$$

$$\cos(2\theta_s - 2\theta_p) = 0$$

$$2\theta_s - 2\theta_p = \pm\frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{\theta_s = \theta_p \pm \frac{\pi}{4}}$$ relación entre θ_s y θ_p

los planos de ef. cortante ocurren a 45° de los planos principales

LEY DE HOOKE PARA ESFUERZO PLANO

(81)

- Se limita a materiales que cumplan que sean uniformes en todo el cuerpo y tiene las mismas prop. en todas las direcciones. (HOMOGENEO E ISOTROPO)
- El material debe seguir HOOKE

y, a, $a\,\varepsilon_x$, $c\,\varepsilon_z$, $b\,\varepsilon_y$, b, x, z

	σ_x	σ_y	τ_{xy}
ε_x	σ_x/E	$-\sigma_y \cdot \nu/E$	0
ε_y	$-\sigma_x \cdot \nu/E$	σ_y/E	0
ε_z	$-\sigma_x \cdot \nu/E$	$-\sigma_y \cdot \nu/E$	0
γ_{xy}	0	0	τ_{xy}/G

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\sigma_y \cdot \nu}{E} = \boxed{\frac{1}{E}\left(\sigma_x - \sigma_y \cdot \nu\right)}$$

$$\varepsilon_y = \frac{-\sigma_x \cdot \nu}{E} + \frac{\sigma_y}{E} = \boxed{\frac{1}{E}\left(\sigma_y - \sigma_x \cdot \nu\right)}$$

$$\varepsilon_z = \frac{-\sigma_x \cdot \nu}{E} + \left(\frac{-\sigma_y \cdot \nu}{E}\right) = \boxed{-\frac{\nu}{E}\left(\sigma_x + \sigma_y\right)}$$

$$\boxed{\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}}$$ → decremento del ángulo entre las caras "x" y "y"

Se considera:
- $E \cdot \varepsilon_x = \sigma_x$
- $\varepsilon_y = -\nu \cdot \varepsilon_x$
- $G = \tau_{xy}/\gamma_{xy}$

$\sigma_x > 0$

para obtener σ_x, σ_y y τ_{xy}.

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \Rightarrow \varepsilon_x \cdot E + \nu\sigma_y = \sigma_x$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu\cdot[\varepsilon_x \cdot E + \nu\cdot\sigma_y]\right)$$

$$\varepsilon_y \cdot E = \sigma_y - \nu\cdot\varepsilon_x\cdot E - \nu^2\sigma_y$$

$$\varepsilon_y \cdot E + \nu\cdot\varepsilon_x\cdot E = \sigma_y - \nu^2\sigma_y$$

$$E(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) = \sigma_y(1-\nu^2)$$

$$\boxed{\sigma_y = \frac{E}{(1-\nu^2)}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x)}$$

$$\varepsilon_y \cdot E = \sigma_y - \nu\sigma_x$$

$$\varepsilon_y \cdot E + \nu\cdot\sigma_x = \sigma_y$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu[\varepsilon_y \cdot E + \nu\sigma_x]\right)$$

$$\varepsilon_x \cdot E = (\sigma_x - \nu\cdot\varepsilon_y E - \nu^2\sigma_x)$$

$$\varepsilon_x \cdot E = \sigma_x - \nu\cdot\varepsilon_y\cdot E - \nu^2\sigma_x$$

$$\varepsilon_x \cdot E + \nu\cdot\varepsilon_y\cdot E = \sigma_x - \nu^2\sigma_x$$

$$E(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) = \sigma_x(1-\nu^2)$$

$$\boxed{\sigma_x = \frac{E\cdot(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y)}{(1-\nu^2)}}$$

$$\boxed{\sigma_z = 0}$$

→ NO HAY σ_x pero $\exists\ \varepsilon_x$.

$$\boxed{\tau_{xy} = G\cdot\gamma_{xy}}$$

Se recuerda que existe una relación entre E, G y ν

$$\boxed{G = \frac{E}{2(1+\nu)}}$$

CAMBIO DE VOLUMEN Los objetos al experimentar def. (82) cambian tanto sus dimensiones como su volumen.

Conociendo las def. normales en tres direcciones mutuamente perp. se puede determinar el cambio de volumen.

$a\varepsilon_x$, a, $b\varepsilon_y$, $c\varepsilon_z$, c, b

$$V_0 = a.b.C$$

$$V_1 = (a + a\varepsilon_x)(b + b.\varepsilon_y)(C + C.\varepsilon_z)$$

$$V_1 = \underbrace{a.b.C}(1+\varepsilon_x)(1+\varepsilon_y)(1+\varepsilon_z)$$

$$V_1 = V_0(1+\varepsilon_x)(1+\varepsilon_y)(1+\varepsilon_z)$$

$$(1+\varepsilon_x)(1+\varepsilon_y) = 1+\varepsilon_y+\varepsilon_x+0 = 1+\varepsilon_y+\varepsilon_x$$

$$(1+\varepsilon_z)(1+\varepsilon_y+\varepsilon_x) = (1+\varepsilon_y+\varepsilon_x+\varepsilon_z+0+0)$$
$$= (1+\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z)$$

$$V_1 = V_0(1+\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z)$$

$$\Delta V = V_1 - V_0 = V_0(1+\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z) - V_0$$
$$= V_0\left[(\cancel{1}+\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z)-\cancel{1}\right]$$

$$\boxed{\Delta V = V_0(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z)}$$

Se puede emplear siempre que las def. sean pequeñas y permanezcan ctes. en todo el volumen.

NO es necesario que siga la Ley de HOOKE y no es necesario que este en estado plano.

e es el Cambio de volumen unitario
o también llamado DILATACIÓN.

$$e = \frac{\Delta V}{V_0} = \frac{V_0 \cdot (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)}{V_0} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

valores positivos en ΔV y e representan aumentos de volumen. ($\ominus$ rep. disminuciones).

- volviendo a mat. que siguen HOOKE.
- siguen esfuerzo plano.

$$e = \frac{\Delta V}{V_0} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) + \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)$$

$$e = \frac{1}{E}\left[(\sigma_x - \nu \cdot \sigma_y) + (\sigma_y - \nu \cdot \sigma_x) - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right]$$

$$e = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu\sigma_y + \sigma_y - \nu\sigma_x - \nu \cdot \sigma_x - \nu\sigma_y\right)$$

$$e = \frac{1}{E}\left(-2\nu \cdot \sigma_y - 2\nu \cdot \sigma_x + \sigma_x + \sigma_y\right)$$

$$e = \frac{1}{E}\left[\sigma_x(1-2\nu) + \sigma_y(1-2\nu)\right] = \frac{1}{E}\left[(1-2\nu)(\sigma_x + \sigma_y)\right]$$

$$\boxed{e = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)}$$

EN ESFUERZO UNIAXIAL SE SIMPLIFICA

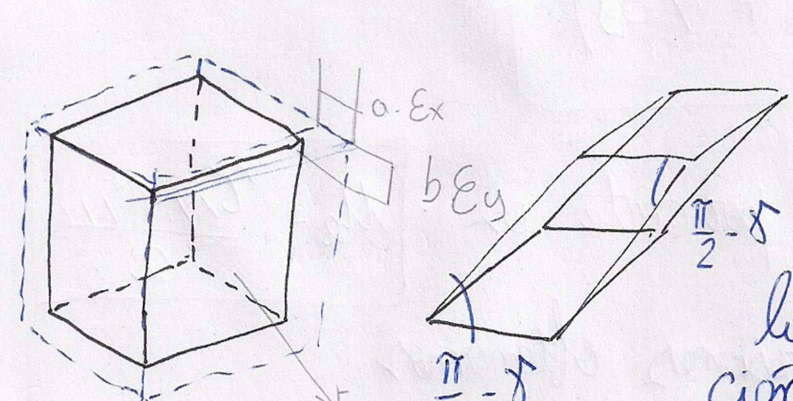
$$e = \frac{\Delta V}{V_0} = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_x + \underbrace{\sigma_y}_{=0}) = \boxed{\frac{\sigma_x}{E} \cdot (1-2\nu)}$$

$\nu_{MAX} = 0{,}5$

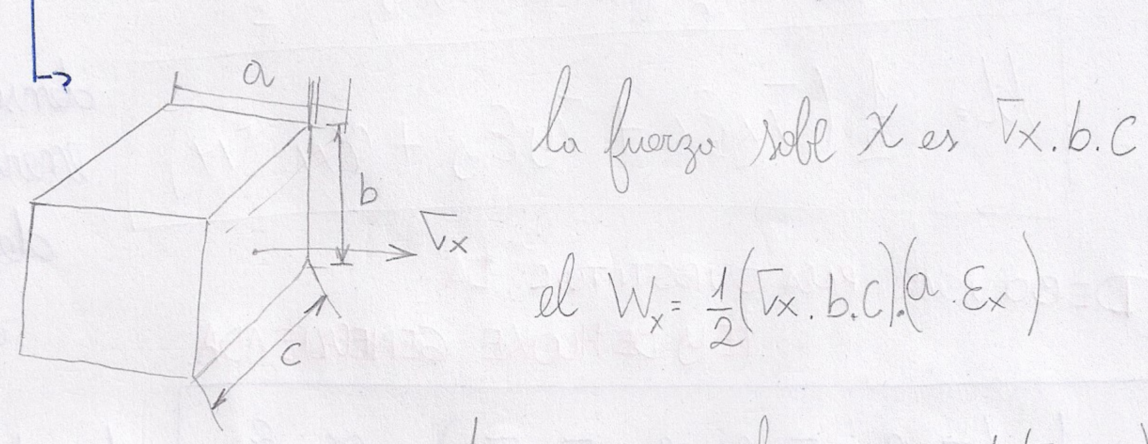
DENSIDAD DE ENERGÍA DE DEFORMACIÓN EN ESFUERZO PLANO.

$\mathcal{U}$ es la energía almacenada (energía de deformación) en un volumen unitario de material.

Se toma un elemento de material



- las def. normales y por corte ocurren de manera independiente. Se pueden sumar las energías de deformación a partir de estos dos elementos.



la fuerza sobre x es $\sigma_x . b . c$

el $W_x = \frac{1}{2}(\sigma_x . b . c) . (a . \varepsilon_x)$

de manera análoga $W_y = \frac{1}{2}(\sigma_y . a . c)(b . \varepsilon_y)$

Sumo $W_x + W_y = \frac{1}{2} \sigma_x . b . c . a . \varepsilon_x + \frac{1}{2} \sigma_y . a . b . c . \varepsilon_y$

$$W_x + W_y = \frac{1}{2} . a . b . c . (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y . \varepsilon_y)$$

$$= \boxed{\frac{a . b . c}{2} . (\sigma_x . \varepsilon_x + \sigma_y . \varepsilon_y) = U}$$

La densidad de energía de def.

$$u_1 = \frac{U}{V} = \frac{\cancel{\overbrace{a.b.c}^{V}}}{2} \cdot (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \cdot \varepsilon_y) \cdot \frac{1}{\cancel{V}}$$

$$u_1 = \frac{1}{2}(\sigma_x \cdot \varepsilon_x + \sigma_y \cdot \varepsilon_y)$$

La densidad de energía de def. por corte es $u_2 = \frac{\tau_{xy} \cdot \gamma_{xy}}{2}$

al combinar ambas expresiones obtenemos

$$u = u_1 + u_2 = \frac{1}{2} \cdot (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y) + \frac{1}{2} \tau_{xy} \cdot \gamma_{xy}$$

$$u = \frac{1}{2}(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \cdot \gamma_{xy})$$

densidad de energía de deformación en esfuerzo plano

DEBO USAR PARA SUBSTITUIR LA LEY DE HOOKE GENERALIZADA.

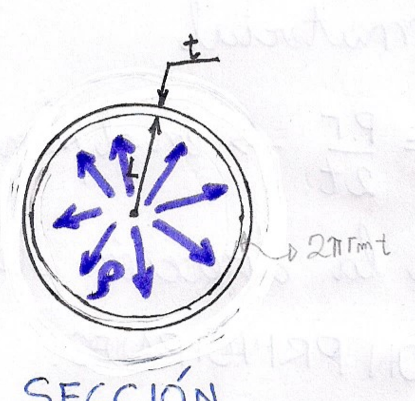
$$u = \frac{1}{2E}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\nu \cdot \sigma_x \cdot \sigma_y) + \frac{\tau_{xy}^2}{2G}$$

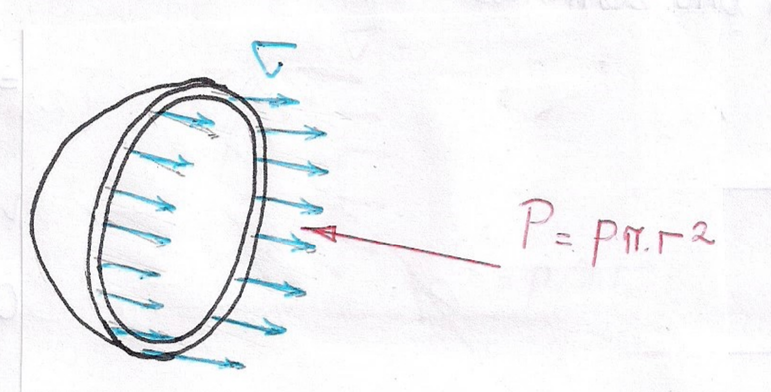
densidad de energía en función de los esfuerzos.

$$u = \frac{E}{2(1-\nu^2)}(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + 2\nu \cdot \varepsilon_x \cdot \varepsilon_y) + \frac{G \cdot \gamma_{xy}^2}{2}$$

densidad de energía en función de las def. unitarias

APLICACIONES DE ESF. PLANO





D. C. L.

P es la presión manométrica. $P >>> P_{EXT.}$!

σ es uniforme por la simetría de la figura, σ esta distribuido uniformemente a traves de t por ser pared delgada.

$$\Sigma F_h = \sigma.(2\pi.r_m.t) - P\pi r^2 = 0$$

$$\sigma.(2\pi.r_m.t) = P.\pi.r^2$$

$r_m \approx r$ poseen POCA DIF.

$$\sigma = \frac{P.\pi.r^2}{2\pi r_m.t}$$

$$\sigma = \frac{P.r^2}{2r.t}$$

$$\boxed{\sigma = \frac{P.r}{2t}}$$

$\sigma = \frac{P.r}{2t}$

La pared de un recipiente esferico presurizado esta sometida a esfuerzos de tensión uniformes σ en todas las direcciones. NO HAY esfuerzos de corte.

por lo general se trata de un caso de esfuerzo BIAXIAL.

Tomando un elemento volumétrico de material

σ_y

σ_x σ_x

σ_y

$\sigma_y = \sigma_x = \sigma_{1,2} = \frac{P \cdot r}{2t}$ → en el plano XY

$\sigma_3 = 0$ → en la dirección de Z

σ_x y σ_y SON PRINCIPALES.

PLANO XZ / YZ

$(\sigma_1, 0)$

$(\sigma_2, 0)$

$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$

$\sigma_3 = 0$

σ

τ_{MAX}

τ

en el plano XY $\boxed{\tau = 0}$

SIOSI el corte max τ_{MAX} está fuera del plano!

$\sigma_{z=0}$

σ_x σ_x

$\sigma_{z=0}$

$(\sigma_1, 0)$

$(\emptyset, 0)$

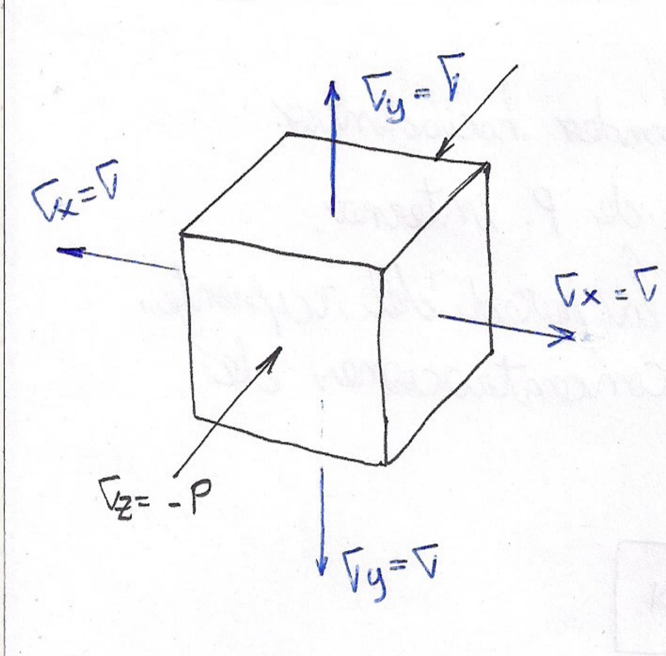
PLANO XZ

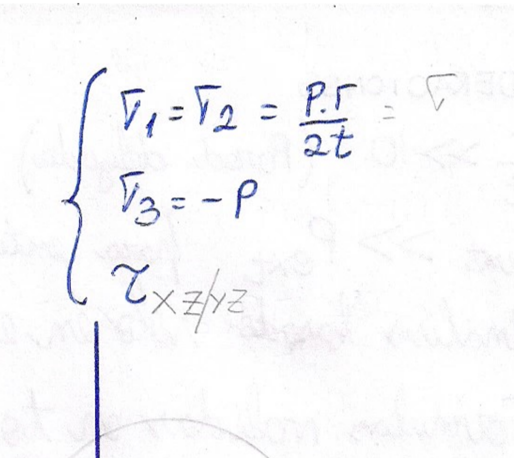
$$\tau_{MAX} = R = \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + 0^2} = \frac{\sigma}{2} = \tau_{MAX}$$

$$\tau_{MAX} = \frac{P \cdot r}{2t} \cdot \frac{1}{2} = \boxed{\frac{P \cdot r}{4t}}$$ → A 45° de las direcciones principales

TODO ESTO OCURRE EN EL EXTERIOR

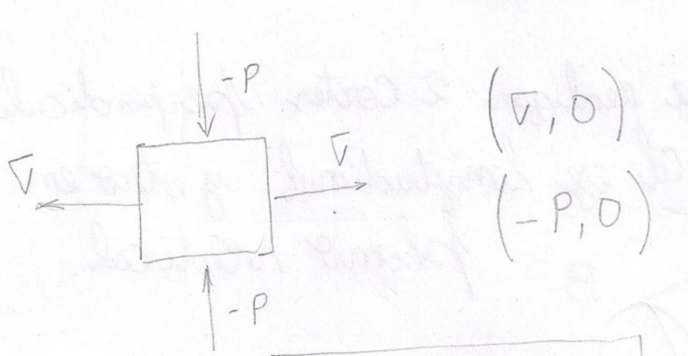
SUP. INTERIOR





$$\begin{cases} \sigma_1 = \sigma_2 = \dfrac{P.r}{2t} = \sigma \\ \sigma_3 = -P \\ \tau_{xz/yz} \end{cases}$$

σ3, σ1 = σ2, σ, τ, τMAX



$(\sigma, 0)$

$(-P, 0)$

$$\tau_{MAX} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2 + 0^2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \tau_{MAX}$$

$$\boxed{\tau_{MAX} = \frac{\sigma + P}{2}}$$

τ_{MAX} a 45° con respecto a X o Y

En el plano $\tau = 0$

$\frac{r}{t} \gg 10$ (por ser de pared delgada)

$$\tau_{MAX} = \frac{P.r}{4t} + \frac{P}{2} = \frac{P}{2}\left(\frac{r}{2t} + 1\right)$$

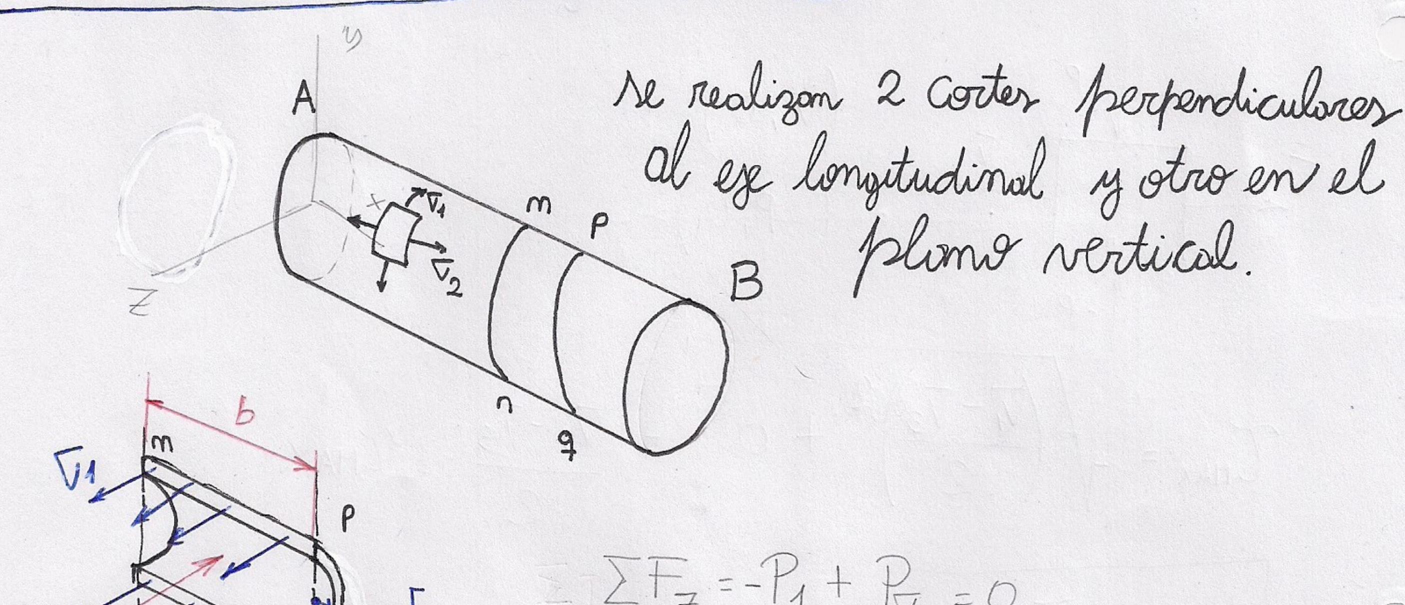
σ_3 es muy peq. en comp. a σ_1 y σ_2

$$\boxed{\tau_{MAX} = \frac{P.r}{4t}}$$

CONSIDERACIONES

- $\frac{r}{t} >> 10$ (Pared delgada)
- $P_{int} >> P_{ext}$ para evitar el pandeo haciadentro.
- Análisis basado solo en efectos de P. interna.
- Formulas validas en toda la pared del recipiente, excepto cerca de puntos de concentraciones de esfuerzos.

RECIPIENTES CILINDRICOS A PRESIÓN



Se realizan 2 cortes perpendiculares al eje longitudinal y otro en el plano vertical.

$$\sum F_Z = -P_1 + P_{\sigma_1} = 0$$

$$P_{\sigma_1} = P_1$$

$$\sigma_1 . (2.b.t) = 2p.b.r$$

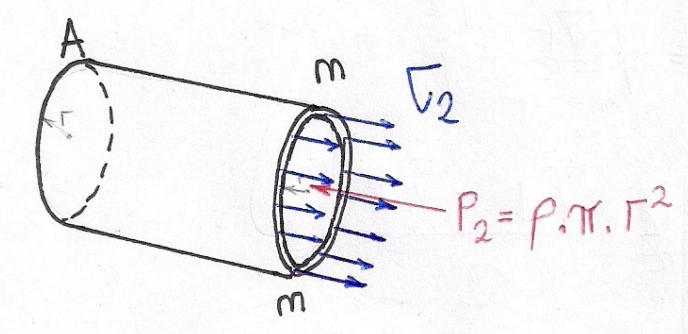
$$\sigma_1 = \frac{2 p.b.r}{2 b t}$$

$$\boxed{\sigma_1 = \frac{p.r}{t}}$$

σ_1 se denomina esfuerzo circunferencial.

para determinar σ_2

$2\pi . r . t$



$$\sum F_x = P_{\sigma_2} - P_2 = 0$$

$$P_{\sigma_2} = P_2$$

$$\sigma_2 (2\pi . r . t) = P . \pi . r^2$$

σ_2 es el esfuerzo longitudinal

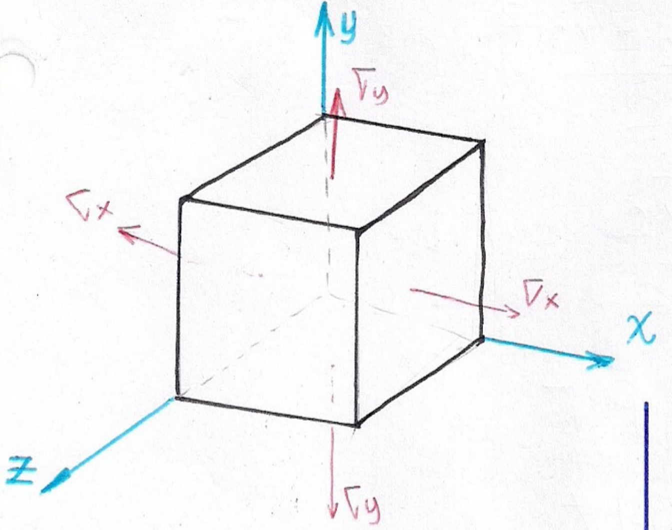
$$\sigma_2 = \frac{P . \pi . r^2}{2 \pi . r . t}$$

$$\boxed{\sigma_2 = \frac{P . r}{2t}}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_1}{2}$$

$$2\sigma_2 = \sigma_1$$

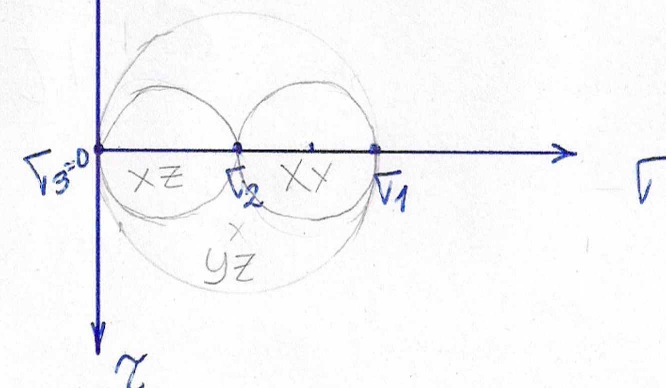
ESFUERZOS EN EL EXTERIOR. (PARED EXTERNA)



$\sigma_1 = \frac{P . r}{t}$ $\quad P_{(x,y)} = (\sigma_1, 0)$

$\sigma_2 = \frac{P . r}{2t}$ $\quad P_2(x,y) = (\sigma_2, 0)$

$\sigma_3 = 0$



CORTE EN XX

σ_2

σ_1

$$\tau_{MAX} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2 + 0^2}$$

$$\left(\tau_{MAX_{1,}}\right)_Z = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

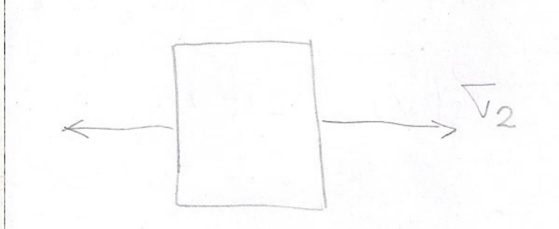
$$\tau_{MAX_Z} = \frac{P.r}{2t} - \frac{P.r}{4t}$$

$$= \frac{P.r}{2t}\left(1 - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{P.r}{2t}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\boxed{\tau_{MAX} = \frac{P.r}{4t}}$$ en el plano

CORTE EN XZ

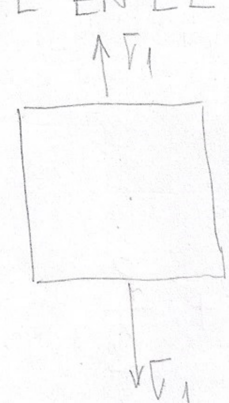


$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2 + 0^2}$$

$$R = \frac{\sigma_2}{2} = \tau_{MAX}$$

$$\boxed{\tau_{MAX} = \frac{P.r}{4t}}$$

CORTE EN EL YZ



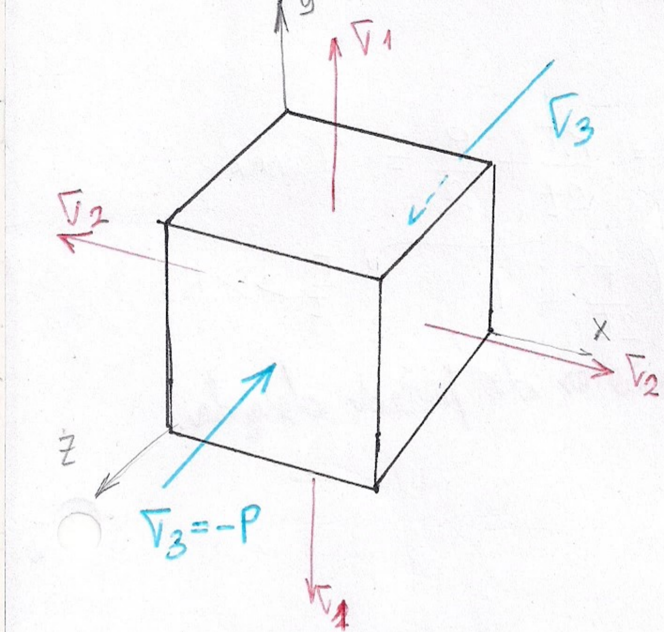
$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2 + 0^2}$$

$$R = \frac{\sigma_1 - 0}{2} = \frac{\sigma_1}{2} =$$

$$\boxed{\tau_{MAX} = \frac{P \cdot r}{2t}}$$

ESF. CORTE MAXIMO ABSOLUTO.

ESFUERZOS EN EL INTERIOR



EN EL INTERIOR

$$\begin{cases} \sigma_1 = \dfrac{P \cdot r}{t} \\ \sigma_2 = \dfrac{P \cdot r}{2t} \\ \sigma_3 = -P \end{cases}$$

EN EL PLANO XY

σ1, σ2, σ2, σ1

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2 - 0^2}$$

$$R = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \tau_{MAX}$$

$$\tau_{MAX} = \frac{P \cdot r}{2t} - \frac{P \cdot r}{4t} = \boxed{\frac{P \cdot r}{4t}}$$

EN EL PLANO ZX

σ_3

σ_2 σ_2

σ_3

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}\right)^2 + 0^2}$$

$$\tau_{MAX} = \frac{\sigma_2-\sigma_3}{2} = \frac{Pr}{4t} + \frac{P}{2}$$

$$\tau_{MAX} = \frac{P}{2}\left(\frac{r}{2t} + 1\right) \rightarrow \frac{r}{t} >> 10 \quad \cancel{P/2}$$

PLANO YZ

σ_1

σ_3 σ_3

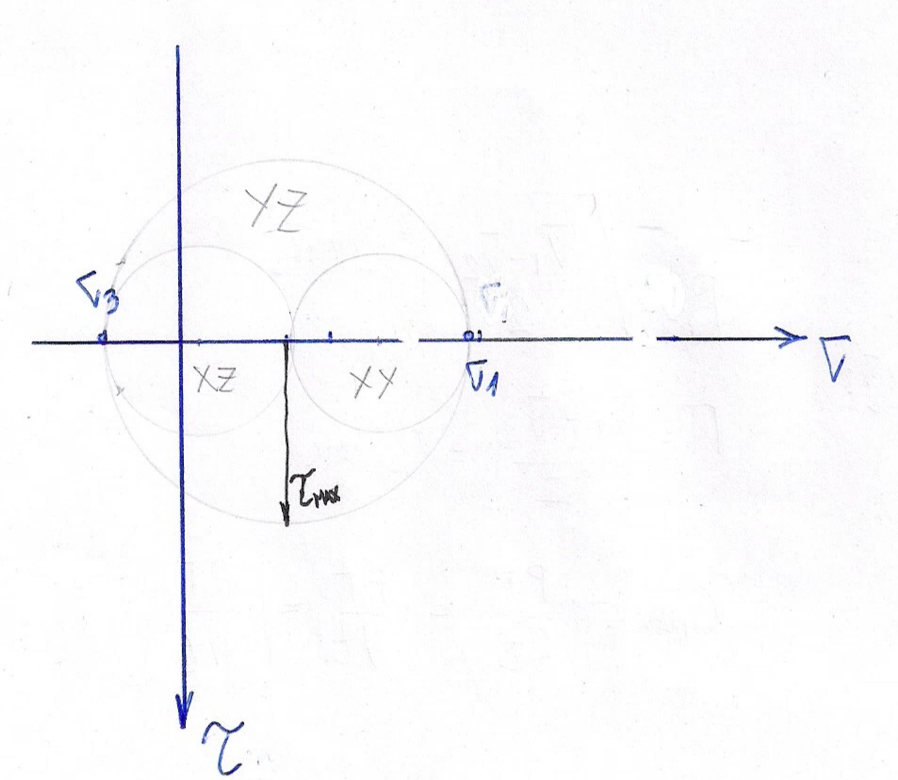
σ_1

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}\right)^2 + 0^2}$$

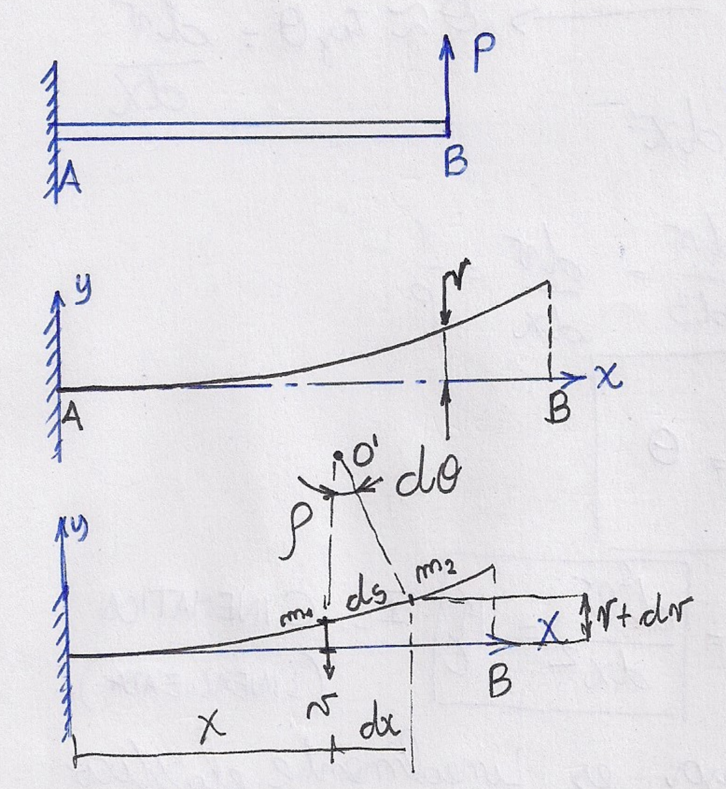
$$R = \frac{\sigma_1-\sigma_3}{2} = \frac{P.r}{2t} + \frac{P}{2} = \tau_{MAX}$$

$$\tau_{MAX} = \frac{P}{2}\left(\frac{r}{2t} + 1\right) \rightarrow \frac{r}{t} >> 10 \quad \cancel{P/2}$$

$\frac{P}{2}$ se puede quitar, si son expresiones de pared delgada.



DEFLEXIONES EN VIGAS



- Ec. dif. de la Curva de deflexión.
  ↳ TODO parte de ahí.

dθ
ds
m2
θ + dθ
m1
θ
v + dv
v

Las secciones permanecen perpendiculares y planas a la directriz formada. Además, los ángulos son muy pequeños. (HIPÓTESIS).

$$\rho . d\theta = ds$$

$$K_C = 1/\rho = \frac{d\theta}{ds} \rightarrow \text{CURVATURA}$$

$\frac{dv}{dx}$ → pendiente de la curva de def.

dv y dx son INFINITAMENTE PEQUEÑOS

$$\frac{dv}{dx} = \tan\theta \Rightarrow \theta = Tg^{-1}\left(\frac{dv}{dx}\right)$$

$\cos\theta = \frac{dx}{ds}$

$\sin\theta = \frac{dv}{ds}$

- ANGULO DE ROTACIÓN PEQUEÑO.

θ es MUY PEQUEÑO ⟶ $\theta \approx \operatorname{tg}\theta = \dfrac{dv}{dx}$

↳ $ds \approx dx$

$$K = \frac{d\theta}{ds} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{\rho}$$

$$\boxed{\frac{dv}{dx} = \theta}$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \boxed{\frac{d^2v}{dx^2} = K}$$ Ec. CINEMATICA (LINEALIZADA).

- Si el material de la viga es Linealmente elástico y sigue la ley de Hooke $K = \dfrac{1}{\rho} = \dfrac{M}{E.I}$

$$K = \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{E.I}$$

BERNOULLI

$$\boxed{\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M(x)}{E.I}}$$ ECUACIÓN CONSTITUTIVA

$$M(x) = E.I.\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)$$

- Se puede aplicar el principio de Superposición. (es lineal)
- para resolverla es necesario conocer $M(x)$.

$$\frac{dV}{dx} = -q$$

$$\frac{dM}{dx} = V$$

$$v'' = \frac{M}{E \cdot I}$$

$$M = v'' \cdot E \cdot I$$

$$\frac{dM}{dx} = v''' \cdot E \cdot I = V$$

$$\boxed{V = v''' \cdot E \cdot I}$$

$$\frac{dV}{dx} = \frac{d(v''' \cdot E \cdot I)}{dx}$$

$$\boxed{-q = v'''' \cdot E \cdot I}$$

METODO DE SUPERPOSICION

La deflexión de una viga producida producido por cargas diferentes que actuan simultaneamente, puede encontrarse suponiendo las deflexiones producidas por los mismos al actuar por separado.

Se basa en la linealidad de las ec. diferenciales, sus efectos se pueden sumar. o superponer de manera algebraica.

es valido si

- la ley de hooke es valida para el material
- deflexiones y rotaciones pequeñas.
- la presencia de las deflexiones no altera las acciones de las cargas aplicadas

EXPRESIÓN EXACTA PARA LA CURVATURA

$$K_t = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds} = \frac{d\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{dv}{dx}\right)\right)}{dx}\frac{dx}{ds}$$

$$\theta = tg^{-1}(v')$$

$$ds^2 = dx^2 + dv^2$$

$$ds = \left(dx^2 + dv^2\right)^{1/2}$$

$$\frac{ds}{dx} = \left[1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right]^{1/2} = \left[1 + (v')^2\right]^{1/2}$$

$$\boxed{\frac{dx}{ds} = \frac{1}{\left[1 + (v')^2\right]^{1/2}}}$$

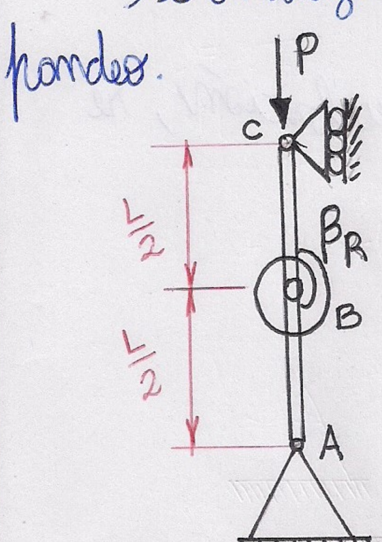
$$\boxed{\frac{d}{dx}(\operatorname{arctg} v') = \frac{v''}{1 + (v')^2}}$$

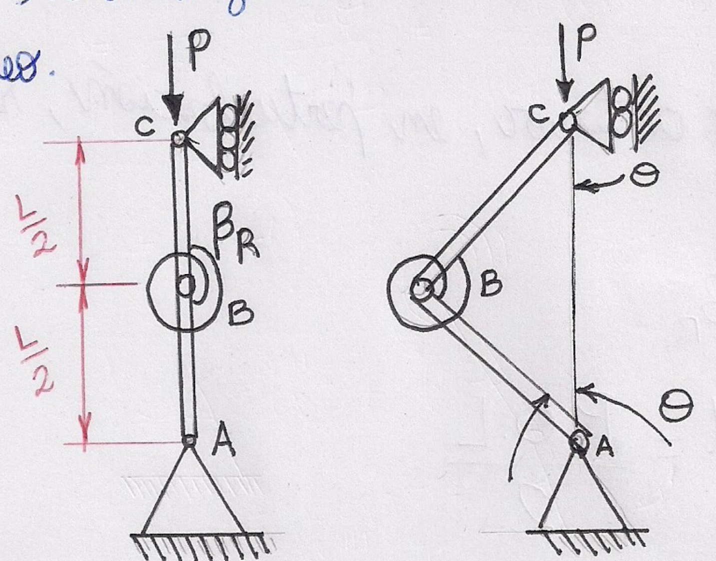
Substituyo

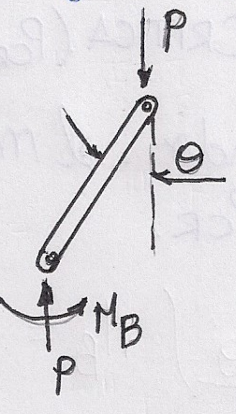
$$\boxed{K = \frac{1}{\rho} = \frac{v''}{\left[1 + (v')^2\right]^{3/2}}}$$

PANDEO Y ESTABILIDAD.

Se analiza una estructura idealizada, o modelo de pandeo.







Son dos barras rígidas AB y BC de longitud L/2, unidas en B por un pasador y mantenidas en posición vertical por un resorte rotacional con rigidez β_R. Ambas barras están perfectamente alineadas, el resorte inicialmente no está sometido a esfuerzo y las barras están en compresión directa.

Una carga externa provoca que el punto B se mueva una distancia pequeña en sentido lateral. Giran un θ y se produce un momento en el resorte, el cual busca regresar a la estructura a su posición original, el momento se denomina RESTITUTIVO, sin embargo P busca incrementar el desp. lateral.

- P es pequeña, M_R recuperará la posición original de la estructura. (estructura en equilibrio ESTABLE).
- Si P es grande, el desplazamiento en B aumentará y la estructura colapsará. (la estructura es INESTABLE), falla por PANDEO LATERAL.

La transición entre los condiciones estable e inestable ocurre para un valor especial de la fuerza axial conocido como CARGA CRITICA (P_{CR}).

Considerando el modelo anterior, en perturbación, se busca det. P_{CR}.

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{B_P} = 2\theta\beta_R \\ M_P = P \cdot d = \dfrac{P \cdot \theta \cdot L}{2} \end{array} \right.$$

$$\sum M_B = M_B - M_P = 0$$ Ecuación de equilibrio.

$$2\theta\beta_R - \frac{P \cdot \theta \cdot L}{2} = 0$$

$$\theta\left(2\beta_R - \frac{P \cdot L}{2}\right) = 0$$

Con $\theta = 0$ (TRIVIAL), significa que la estructura se encuentra en equilibrio cuando es perfectamente recta, sin importar el valor de P.

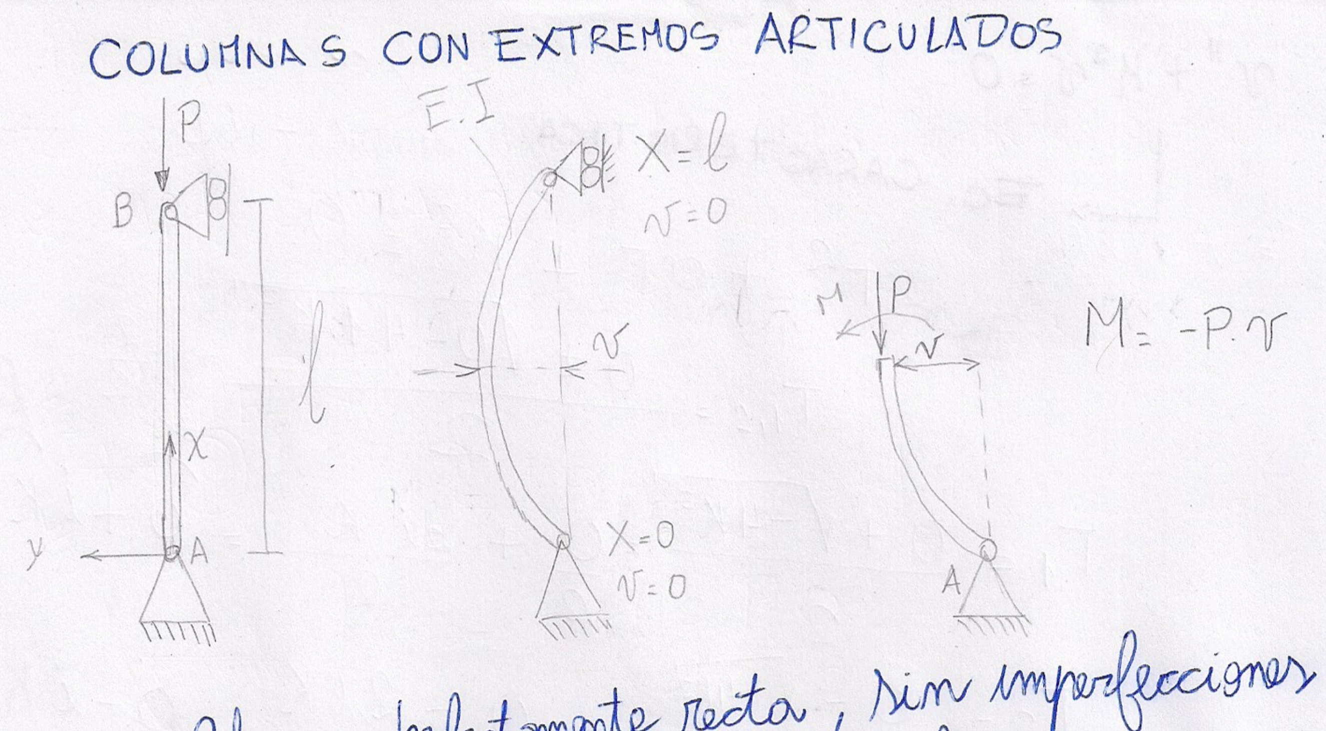
Con $\theta \neq 0$

$$2\beta_R - \frac{P \cdot L}{2} = 0$$ (igualo a 0 el termino entre parentesis).

$$2\beta_R = \frac{P \cdot L}{2}$$

$$\boxed{\frac{4\beta_R}{L} = P_{CR}}$$

COLUMNAS CON EXTREMOS ARTICULADOS



• Columna perfectamente recta, sin imperfecciones y hecha de material linealmente elástico que sigue la ley de HOOKE. Se la llama COLUMNA IDEAL.

$P < P_{CR}$ Eq. ESTABLE

$P = P_{CR}$ Eq. NEUTRO (O INDIFERENTE)

$P > P_{CR}$ Eq. INESTABLE.

Se empieza

M es el momento flector

$$v'' = \frac{M}{E.I}$$

$$v''.E.I = M$$

$$v''.E.I = -P.v$$

$$E.I.v'' + P.v = 0$$

RESUELVO LA EDH de 2do ORDEN LINEAL Y CON Coef. Ctes.

SOLUCIÓN

$$K^2 = \frac{P}{E.I} \quad o \quad K = \sqrt{\frac{P}{E.I}}$$

$$\frac{E.I.v''}{EI} + \frac{P.v}{EI} = \frac{0}{EI}$$

$$\boxed{v'' + K^2.v = 0}$$

$v'' + K^2 v = 0$

→ Ec. CARACTERISTICA

$\alpha + i\beta$

$\alpha - i\beta$

$$r^2 + 0r + K^2 = 0.$$

$$r_{1,2} = \frac{0 \pm \sqrt{0 - 4.1.K^2}}{2}$$

$$r_1 = \frac{0 + \sqrt{-4K^2}}{2} = \frac{0}{2} + \frac{2iK}{2} = \overset{\alpha}{0} + i\overset{\beta}{K}$$

$$r_2 = \frac{0 - \sqrt{-4K^2}}{2} = 0 - \frac{2iK}{2} = 0 - iK$$

- Sol. GENERAL.

$$v_G = A.e^{\alpha x}.\cos(\beta x) + B.e^{\alpha x}.\operatorname{sen}(\beta x)$$

$$v = A.e^0.\cos(K.x) + B.e^0.\operatorname{sen}(Kx)$$

$$v = A.\cos(Kx) + B.\operatorname{sen}(Kx)$$

- DET. COEFICIENTES.

$v(0) = 0$ $(x=0)$ ✓

$v(L) = 0$ $(x=L)$

$$0 = A.\cos(K.x) + B.\operatorname{sen}(K.x)$$

$$0 = A.\cos(0) + B.\operatorname{sen}(0)$$

$$0 = A.\cos(0)$$

→ $\boxed{A=0}$ ✓

NOS QUEDA

$$v = B.\,sen\,(K.x)$$

USO LA SEGUNDA CONDICIÓN

$$0 = B.\,sen\,K.L$$

→ ① $B = 0$ → $v = 0$ (DEFLEXIÓN) → COLUMNA RECTA → (SOLUCIÓN TRIVIAL)

→ ② $sen\,K.L = 0$

→ $K.L = 0, \pi, 2\pi, \ldots$

→ $K.L = 0$ → $P = 0$ NO ME INTERESA

$$KL = n.\pi \qquad n = 1, 2, 3, etc$$

$$v = B.\,sen\left(\frac{n.\pi}{L}.x\right)$$

$P.v$

$$E.I.v'' + P.B.\,sen\left(\frac{n.\pi}{L}.x\right) = 0$$

$$v' = B.\cos\left(\frac{n.\pi}{L}.x\right)\frac{n.\pi}{L}$$

$$v'' = -\frac{B.n.\pi}{L}\,sen\left(\frac{n.\pi}{L}.x\right)\frac{n.\pi}{L}$$

$$v'' = -B.\frac{n^2.\pi^2}{L^2}.\,sen\left(\frac{n.\pi}{L}.x\right)$$

$$E.I.\left[-B.\frac{n^2.\pi^2}{L^2}.\,sen\left(\frac{n.\pi}{L}.x\right)\right] + P.\left[B.\,sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right] = 0$$

$$~~B\,sen\left(\frac{n.\pi}{L}x\right)~~\left[-E.I.\frac{n^2.\pi^2}{L^2} + P\right] = 0$$

$$-E \cdot I \cdot \frac{n^2 \pi^2}{L^2} + P = 0$$

$$P = \frac{E \cdot I \, n^2 \pi^2}{L^2}$$

$$\boxed{P_{CR} = \frac{n^2 \cdot \pi^2 \cdot E \cdot I}{L^2}}$$

COLUMNA CON EXTREMOS ARTICULADOS $n = 1$

$$\boxed{P_{CR} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{L^2}}$$

B representa la deflexión en el punto medio de la columna, y puede tener cualquier valor pequeño. (+ o -)

El pandeo tratado anteriormente se denomina PANDEO DE EULER, la P_{CR} se suele denominar CARGA DE EULER.

n es el NUMERO de SEMIONDAS, tambien se interpreta como numero de arriostramiento.

ESF. CRÍTICO

$$P_{CR} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{L^2}$$

$$r_G = \sqrt{\frac{I}{A}}$$

RADIO DE GIRO

$$\sigma_{CR} = \frac{P_{CR}}{A} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{A \cdot L^2} = \frac{\pi^2 \cdot E}{(L/r)^2}$$

$\frac{L}{r}$ = relación de esbeltez.
↓
DEPENDE DE LAS DIMENSIONES DE LA COLUMNA

$$\lambda = \frac{L}{r_G}$$

$$\sigma_{CR} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2}$$

↳ Para columnas reales suele estar entre 30 y 150

σ, ε, σ_{CR}, σ_P, PANDEO PLÁSTICO, PANDEO ELÁSTICO, λ_{lim}, λ

CURVA DE EULER: Esfuerzo crítico en función de la esbeltez.
↳ NO ES UNA HIPERBOLA! ; es una curva de una ecuación de tercer grado con dos variables.